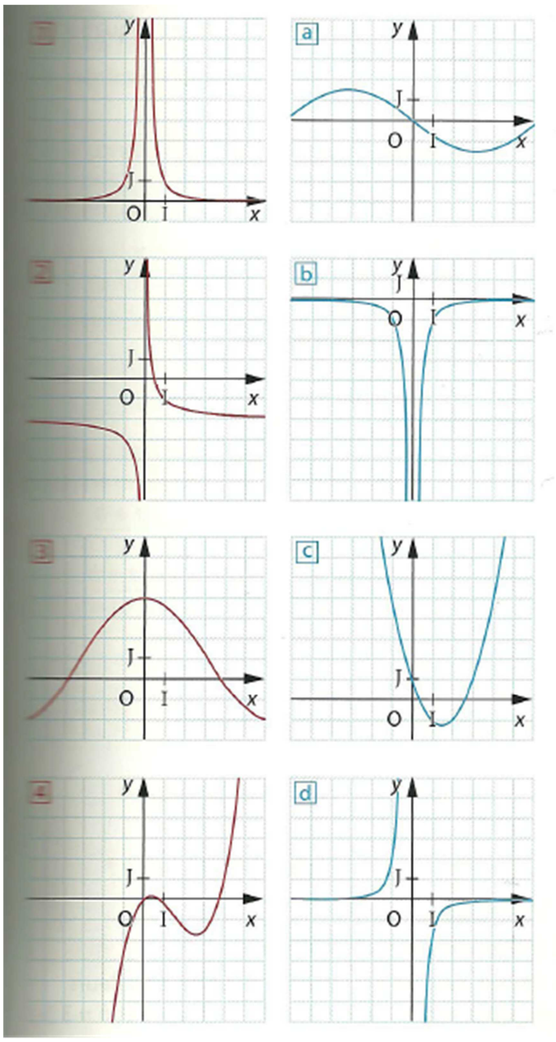
Exercices supplémentaires : Application de la dérivation

Partie A : Variations

Exercice 1

On donne les courbes de quatre fonctions en rouge et celles de leurs dérivées en bleu.
Associer chaque fonction à sa dérivée. Justifier.



Exercice 2

Dans chaque cas, calculer la dérivée de la fonction f puis déterminer les variations de f.

1) $f: x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$
2) $f: x \mapsto x^3 - 3x + 1$ sur $\mathbb{R}$
3) $f: x \mapsto -x^4 - 2x^2 + 5$ sur $\mathbb{R}$
4) $f: x \mapsto \frac{x-3}{x-1}$ pour $x \neq 1$
5) $f: x \mapsto \frac{1-x}{x^2}$ pour $x \neq 0$
6) $f: x \mapsto \frac{x^2-3x+6}{x-1}$ pour $x \neq 1$
7) $f: x \mapsto \frac{x^2-x+3}{x^2-4x+3}$ pour $x \neq 1$ et $x \neq 3$
8) $f: x \mapsto (x^2-1)\sqrt{x}$ sur $]0; +\infty[$
9) $f: x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x+\frac{1}{x}}$ sur $]0; +\infty[$

Exercice 3

On considère la fonction $f: x \mapsto x^3 - 12x$ sur $[-10; 10]$.

1) Calculer f' et dresser le tableau de variations de f.
2) Donner un encadrement de $f(x)$ pour $x \in [-5; 2]$.
3) On considère un réel m. Donner, suivant les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

Exercice 4

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3 - 4x + 2$ sur $\mathbb{R}$.

1) Montrer que $f'(x) = (x-1)(x+2)^2$.
2) En déduire le sens de variations de f.
3) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ suivant les valeurs de m.

<u>Partie B : Extremums</u>

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

1) Etudier le sens de variations de f.
2) f possède-t-elle des extremums locaux ? des extremums globaux ?

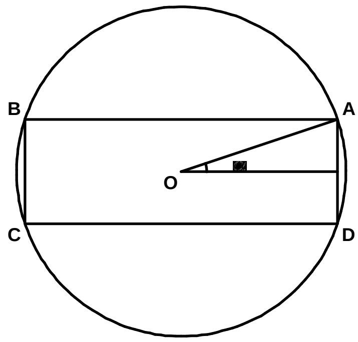
Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x-2}$.

1) Etudier le sens de variations de f.
2) f possède-t-elle des extremums locaux ? des extremums globaux ?

<u>Partie C : Exercices bilan</u>

Exercice 1



Dans un tronc d'arbre circulaire, on découpe une poutre de forme parallélépipédique rectangle. La résistance à la flexion de cette poutre varie comme le produit $\ell \times h^2$ où $\ell = AB$ et $h = BC$ sur la figure ci-contre. On prend comme unité de longueur le rayon du tronc d'arbre (ce rayon est donc de 1).

1) Montrer que $h^2 = 4 - \ell^2$
2) En déduire que $\ell \times h^2 = -\ell^3 + 4\ell$.
3) On considère la fonction $f : x \mapsto -x^3 + 4x$ pour $x \geq 0$.
   a. Etudier le sens de variations de f.
   b. Comment choisir ℓ et h pour que la poutre résiste au mieux à la flexion ?
   c. Quel est l'angle α correspondant à 0,1° près ?

Exercice 2

Un industriel doit fabriquer une boite fermée de volume 1ℓ, soit $1\ dm^3$, ayant la forme d'un pavé de hauteur h dont la base est un carré de côté x. L'unité de longueur est le dm.

1) Justifier que $h = \frac{1}{x^2}$.
2) En déduire que l'aire totale des faces du pavé est $S(x) = 2x^2 + \frac{4}{x}$.
3) Montrer que pour $x > 0$, on a $S'(x) = \frac{4(x-1)(x^2+x+1)}{x^2}$
4) En déduire les variations de S.
5) Donner les dimensions de la boîte d'aire minimale.

Exercice 3

Avec un disque de rayon R, on souhaite confectionner un cône de révolution ouvert (sans la base). Pour cela, on enlève un secteur angulaire du disque.

La base du cône a pour rayon r et on pose $k = \frac{r}{R}$.

1) Fabriquer un tel cône
2) Justifier que $k < 1$ et que la hauteur du cône obtenu est $h = R\sqrt{1-k^2}$
3) Montrer que le volume du cône est $V(k) = \frac{\pi R^3}{3}k^2\sqrt{1-k^2}$
4) On veut déterminer le rapport k qui rend le volume V maximal.
   a. Expliquer pourquoi la fonction V a le même sens de variations de la fonction V^2 sur $[0;1]$.
   b. Déterminer la valeur de k pour laquelle V^2 est maximal.
   c. En déduire la hauteur du cône de volume maximal et son volume.

Exercice 4

On considère la fonction $f: x \mapsto |x^2 - 2x - 3|$ pour tout réel x.

1) Etudier le signe de $x^2 - 2x - 3$.
2)
   a. Etudier les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 2\,x - 3$.
   b. La fonction g possède-t-elle des extremums locaux ?
   c. Représenter graphiquement la fonction g.
3)
   a. Exprimer $f(x)$ en fonction de $g(x)$ sans valeur absolue en distinguant plusieurs intervalles.
   b. Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.
   c. Déduire la courbe de f à partir de celle de g.
   d. La fonction f possède-t-elle des extremums locaux ?

Exercice 5

1) Vérifier que pour tout réel x, on a $x^3 + 3x^2 - 54 = (x-3)(x^2 + 6x + 18)$.
2) En déduire le signe du polynôme P défini par $P(x) = x^3 + 3x^2 - 54$.
3) Une entreprise produit q milliers de pièces par jour, q étant un réel de $]0; 5]$. Le prix de revient d'une pièce, exprimé en euros, dépend de q et est donné par l'expression $f(q) = \frac{q^3+6q^2+12q+108}{12q}$
   a. Quel est, à un euro près, le prix de revient d'une pièce lorsque l'entreprise produit 4200 pièces par jour ? Quel est donc pour l'entreprise le coût engendré par la production de 4200 pièces ?
   b. Démontrer que pour tout $q \in]0\,;5]$, $f'(q) = \frac{24P(q)}{144q^2}$ où P est le polynôme défini à la question 2.
   c. Dresser le tableau de variations de f.
   d. En déduire le nombre q_0 d'unités à fabriquer pour que le prix de revient d'une pièce soit minimal. Quel est alors le montant en euros du coût total de production ?

Correction exercices supplémentaires : Application de la dérivation

Partie A : Variations

Exercice 1

La fonction de la courbe rouge 1 est croissante sur $]-\infty; 0[$ et décroissante sur $]0; +\infty[$ donc sa dérivée doit être positive sur $]-\infty; 0[$ et négative sur $]0; +\infty[$. De plus, 0 est une valeur interdite. C'est donc la courbe d qui correspond à la dérivée de f_1.
La fonction de la courbe rouge 2 est décroissante sur $]-\infty; 0[$ et décroissante sur $]0; +\infty[$ donc sa dérivée doit être négative sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$. De plus, 0 est une valeur interdite. C'est donc la courbe b qui correspond à la dérivée de f_2.
La fonction de la courbe rouge 3 est croissante sur $]-\infty\,; 0]$ et décroissante sur $[0; +\infty[$ donc sa dérivée doit être positive sur $]-\infty; 0]$ et négative sur $[0; +\infty[$. C'est donc la courbe a qui correspond à la dérivée de f_3.
La fonction de la courbe rouge 4 est donc associée à la courbe c par élimination.

Exercice 2

1) f est un polynôme donc est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3x^2$. Cette dérivée est bien évidemment positive sur $\mathbb{R}$ donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

2) f est un polynôme donc est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$

Or $x^2 - 1$ est du signe de $a = 1$ sauf entre les racines $x_1 = 1$ et $x_2 = -1$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de fa		↗	3	↘	-1	↗	

3) f est un polynôme donc est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -4x^3 - 4x = -4x(x^2 + 1)$

$x^2 + 1$ est bien évidemment strictement positif donc $f'(x)$ est du signe de $-4x$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f		↗	5	↘	

4) f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u : x \mapsto x - 3$ dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $u'(x) = 1$ et $v : x \mapsto x - 1$ dérivable et non nulle sur $\mathbb{R} - \{1\}$ avec $v'(x) = 1$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{1\}$ et

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{(x-1) - (x-3)}{(x-1)^2} = \frac{2}{(x-1)^2}$$

Cette expression est bien évidemment positive donc f est croissante sur $]-\infty\,; 1[$ et sur $]1\,; +\infty[$.

5) f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u : x \mapsto 1 - x$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = -1$ et $v : x \mapsto x^2$ dérivable et non nulle sur $\mathbb{R} - \{0\}$ avec $v'(x) = 2x$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{-x^2 - 2x(1-x)}{(x^2)^2} = \frac{-x^2 - 2x + 2x^2}{x^4} = \frac{x^2 - 2x}{x^4} = \frac{x(x-2)}{x^4} = \frac{x-2}{x^3}$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
Signe de $x - 2$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de x^3		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f		↗	‖	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	

6) f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u : x \mapsto x^2 - 3x + 6$ dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $u'(x) = 2x - 3$ et $v : x \mapsto x - 1$ dérivable et no_1n nulle sur $\mathbb{R} - \{1\}$ avec $v'(x) = 1$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{1\}$ et

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{(2x-3)(x-1) - (x^2 - 3x + 6)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - 3x + 3 - x^2 + 3x - 6}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$$

Le dénominateur est clairement positif donc $f'(x)$ est du signe de $x^2 - 2x - 3$. Le discriminant est $\Delta = 16$ donc $x^2 - 2x - 3$ est du signe de $a = 1$ sauf entre les racines $x_1 = \frac{2+4}{2} = 3$ et $x_2 = \frac{2-4}{2} = -1$.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f		↗	-5	↘	‖	↘	3	↗	

7) f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u : x \mapsto x^2 - x + 3$ dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $u'(x) = 2x - 1$ et $v : x \mapsto x^2 - 4x + 3$ dérivable et non nulle sur $\mathbb{R} - \{1; 3\}$ avec $v'(x) = 2x - 4$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{1; 3\}$ et

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(x^2 - 4x + 3) - (2x-4)(x^2 - x + 3)}{(x^2 - 4x + 3)^2} = \frac{-3x^2 + 9}{(x^2 - 4x + 3)^2}$$

Le dénominateur est clairement positif donc $f'(x)$ est du signe de $-3x^2 + 9$ qui est du signe de $a = -3$ sauf entre les racines $x_1 = \sqrt{3}$ et $x_2 = -\sqrt{3}$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		1		$\sqrt{3}$		3		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
Variations de f		↘	$\frac{3\sqrt{3} - 4}{2}$	↗	‖	↗	$-\frac{4 + 3\sqrt{3}}{2}$	↘	‖	↘	

$$f(\sqrt{3}) = \frac{3 - \sqrt{3} + 3}{3 - 4\sqrt{3} + 3} = \frac{(6 - \sqrt{3})(6 + 4\sqrt{3})}{(6 - 4\sqrt{3})(6 + 4\sqrt{3})} = \frac{24 + 18\sqrt{3}}{-12} = -\frac{4 + 3\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad f(-\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3} - 4}{2}$$

8) f est de la forme uv avec $u : x \mapsto x^2 - 1$ dérivable sur $]0; +\infty[$ avec $u'(x) = 2x$ et $v : x \mapsto \sqrt{x}$ dérivable sur $]0; +\infty[$ avec $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ donc f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 2x\sqrt{x} + (x^2 - 1) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2x\sqrt{x} \times 2\sqrt{x} + x^2 - 1}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2 - 1}{2\sqrt{x}}$$

Le dénominateur est clairement positif donc $f'(x)$ est du signe de $5x^2 - 1$ qui s'annule en $\frac{\sqrt{5}}{5}$ et $-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

x	0		$\frac{\sqrt{5}}{5}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f		↘	$-\frac{4}{5}\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{5}}$	↗	

$$f\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = \left(\frac{1}{5} - 1\right)\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{5}} = -\frac{4}{5}\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{5}}$$

9) f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u : x \mapsto \sqrt{x}$ dérivable sur $]0\,;+\infty[$ avec $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $v : x \mapsto x + \frac{1}{x}$ dérivable sur $]0\,;+\infty[$ avec $v'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ donc f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \times \left(x + \frac{1}{x}\right) - \sqrt{x} \times \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2} = \frac{\frac{(x^2+1)\sqrt{x}}{2x^2} - \frac{2\sqrt{x}(x^2-1)}{2x^2}}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x}(3 - x^2)}{2x^2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2}$$

Le dénominateur, ainsi que $\sqrt{x}$ est clairement positif donc $f'(x)$ est du signe de $3 - x^2$ qui s'annule en $\sqrt{3}$ et en $-\sqrt{3}$.

x	0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f		↗		↘	

$$f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{\sqrt{3}}}{\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

Exercice 3

1) f est un polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $[-10; 10]$ et $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x-2)(x+2)$.
$f'(x)$ est du signe de $a = 3$ sauf entre les racines -2 et 2.

x	-10		-2		2		10
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	-880	↗	16	↘	-16	↗	880

2) Sur $[-5; 2]$, le maximum de f est atteint en -2 donc il est égal à 16 et le minimum est soit atteint en -5, soit en 2 or $f(-5) = -65$ donc $\boxed{f(x) \in [-65; 16]}$

3) Pour $m < -880$, l'équation $f(x) = m$ n'a pas de solutions.
Pour $m \in [-880; -16[$, l'équation $f(x) = m$ a une seule solution.
Pour $m = -16$, l'équation $f(x) = m$ a deux solutions.
Pour $m \in]-16; 16[$, l'équation $f(x) = m$ a trois solutions.
Pour $m = 16$, l'équation $f(x) = m$ a deux solutions.
Pour $m \in]16; 880]$, l'équation $f(x) = m$ a une solution.
Pour $m > 880$, l'équation $f(x) = m$ n'a pas de solutions.

Exercice 4

1) f est un polynôme donc il est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = x^3 + 3x^2 - 4$.
Or $(x-1)(x+2)^2 = (x-1)(x^2+4x+4) = x^3 + 4x^2 + 4x - x^2 - 4x - 4 = x^3 + 3x^2 - 4$
Donc on a bien $f'(x) = (x-1)(x+2)^2$

2) $(x+2)^2$ est positif donc $f'(x)$ est du signe de $x - 1$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f		↘	$-\frac{3}{4}$	↗	

3) Pour $m < -\frac{3}{4}$, l'équation $f(x) = m$ n'a pas de solutions.
Pour $m = -\frac{3}{4}$, l'équation $f(x) = m$ a une seule solution.
Pour $m > -\frac{3}{4}$, l'équation $f(x) = m$ a deux solutions.

<u>Partie B : Extremums</u>

Exercice 1

1) f est un polynôme donc est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$.

Etudions le signe de $f'(x)$: $\Delta = (-12)^2 - 4 \times 3 \times 9 = 36$ donc $f'(x)$ est du signe de $a = 3$ sauf entre les racines $x_1 = \frac{12+6}{6} = 3$ et $x_2 = \frac{12-6}{6} = 1$.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f		$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	

2) f possède un maximum local (5) et un minimum local (1) mais ne possède aucun maximum ou minimum global.

Exercice 2

1) f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u : x \mapsto (x-1)^2$ dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $u'(x) = 2x - 2$ et $v : x \mapsto x - 2$ dérivable et non nul sur $\mathbb{R} - \{2\}$avec $v'(x) = 1$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{2\}$ et

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{(2x-2)(x-2) - (x^2 - 2x + 1)}{(x-2)^2} = \frac{2x^2 - 4x - 2x + 4 - x^2 + 2x - 1}{(x-2)^2}$$
$$= \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}$$

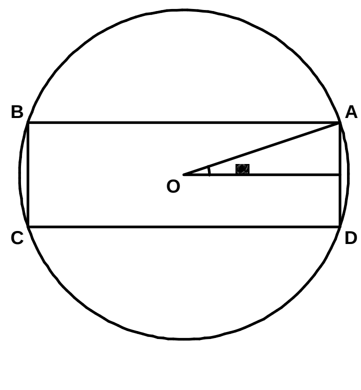
Le dénominateur est clairement positif donc $f'(x)$ est du signe de $x^2 - 4x + 3$. Or pour ce trinôme, $\Delta = 4$ donc il est du signe de $a = 1$ sauf entre les racines $x_1 = \frac{4+2}{2} = 3$ et $x_2 = \frac{4-2}{2} = 1$.

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0		$\Vert$	$-$	0	$+$	
Variations de f		$\nearrow$	0	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	4	$\nearrow$	

2) f possède donc bien un maximum et un minimum local mais aucun maximum ou minimum global.

<u>Partie C : Exercices bilan</u>

Exercice 1



1) Dans le triangle ABC rectangle en B, on utilise le théorème de Pythagore : $AC^2 = AB^2 + BC^2$ or $AC = 2$ (car le rayon du tronc d'arbre est égal à 1) donc $2^2 = \ell^2 + h^2$ ce qui donne bien $\boxed{h^2 = 4 - \ell^2}$

2) $\ell \times h^2 = \ell \times (4 - \ell^2) = 4\ell - \ell^3$

3)

a. f est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[0; +\infty[$ et
$f'(x) = -3x^2 + 4$.

Ceci est du signe de $a = -3$ sauf entre les racines $x_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ et $x_2 = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

x	0		$\frac{2\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f		$\nearrow$		$\searrow$	

b. La résistance à la flexion est donc la plus grande possible pour $\ell = \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1{,}155$ et $h = \frac{2\sqrt{6}}{3} \approx 1{,}633$ car $h^2 = 4 - \ell^2 = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$

c. $\tan(\alpha) = \left(\frac{h}{2}\right) \div \left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{h}{\ell} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \times \frac{3}{2\sqrt{3}} = \sqrt{2}$ donc $\alpha \approx 54{,}74°$

Exercice 2

1) Le volume d'un pavé est $longueur \times largeur \times hauteur$ donc $\mathcal{V} = x \times x \times h$ or $\mathcal{V} = 1$ donc $x^2 h = 1$ ou encore $h = \frac{1}{x^2}$.

2) Pour les faces, il y a deux carrés de côtés x et quatre rectangles de côtés x et h donc
$S(x) = 2x^2 + 4 \times xh = 2x^2 + \frac{4x}{x^2} = \boxed{2x^2 + \frac{4}{x}}$

3) S est une somme de fonctions dérivable sur $]0; +\infty[$ donc elle est dérivable sur $]0; +\infty[$ et
$S'(x) = 4x - \frac{4}{x^2} = \frac{4x^3 - 4}{x^2} = \frac{4(x^3 - 1)}{x^2}$
Or $(x-1)(x^2+x+1) = x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1 = x^3 - 1$ donc on a bien $S'(x) = \frac{4(x-1)(x^2+x+1)}{x^2}$.

x	0		1		$+\infty$
Signe de $S'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de S		$\searrow$	6	$\nearrow$	

4) La boîte d'aire minimale (et qui donc utilise le moins de matières premières) est une boîte cubique de côté 1.

Exercice 3

1)

2) Le périmètre de la base, égal à $2\pi r$, correspond au périmètre du secteur angulaire restant du premier disque. Il est bien évidemment inférieur au périmètre total du premier disque, à savoir $2\pi R$. On a donc $2\pi r < 2\pi R$ ou encore $r < R$. Ceci donne donc $\frac{r}{R} < 1$, soit $\boxed{k < 1}$

En notant S le sommet du cône, H le pied de la hauteur et donc le centre de la base et A un point sur le cercle de base, le triangle SAH est rectangle en H et d'après le théorème de Pythagore, on a $AS^2 = SH^2 + AH^2$.
Or AS correspond au rayon du disque de départ, soit R ; SH est la hauteur du cône, soit h ; AH correspond au rayon de la base du cône, soit r. On a alors $R^2 = h^2 + r^2$ et donc

$$h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)} = \boxed{R\sqrt{1-k^2}}$$

3) $V(k) = \frac{1}{3} h \times \mathcal{A}_{base} = \frac{1}{3} R\sqrt{1-k^2} \times \pi r^2 = \frac{\pi R}{3}\sqrt{1-k^2} \times (Rk)^2 = \boxed{\frac{\pi R^3}{3} k^2 \sqrt{1-k^2}}$

4)

a. Sur $[0; 1]$, V est bien évidemment positive donc, comme la fonction carrée est croissante sur $[0; +\infty[$, V^2 a les mêmes variations que V.

b. Pour $k \in [0; 1]$, $V^2(k) = \frac{\pi^2 R^6}{9} k^4 (1 - k^2) = \frac{\pi^2 R^6}{9}(k^4 - k^6)$

V^2 est donc un polynôme et est dérivable sur $[0; 1]$ avec $(V^2)'(k) = \frac{\pi^2 R^6}{9} \times (4k^3 - 6k^5) = \frac{\pi^2 R^6}{9} \times 2k^3(2 - 3k^2)$
$\frac{\pi^2 R^6}{9} \times 2k^3$ est bien évidemment positif donc la dérivée de V^2 est du signe de $2 - 3k^2$ qui s'annule en $-\sqrt{\frac{2}{3}}$ et $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Sur $\left[0;\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$, $2-3k^2$ est positif donc V^2 est croissante et sur $\left[\sqrt{\frac{2}{3}};1\right]$, $2-3k^2$ est négatif donc V^2 est décroissante.

Finalement, V^2 est maximal pour $\boxed{k=\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}}$

c. $h=R\sqrt{1-k^2}=R\sqrt{1-\frac{2}{3}}=R\sqrt{\frac{1}{3}}=\boxed{\frac{R\sqrt{3}}{3}}$

$$V_{max}=\frac{\pi R^3}{3}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2}=\frac{\pi R^3}{3}\times\frac{2}{3}\times\sqrt{\frac{1}{3}}=\boxed{\frac{2\pi R^3\sqrt{3}}{27}}$$

Exercice 4

1) Signe de x^2-2x-3 : $\Delta=(-2)^2-4\times(-3)=16$ donc x^2-2x-3 est du signe de $a=1$ sauf entre les racines $x_1=\frac{2+4}{2}=3$ et $x_2=\frac{2-4}{2}=-1$.

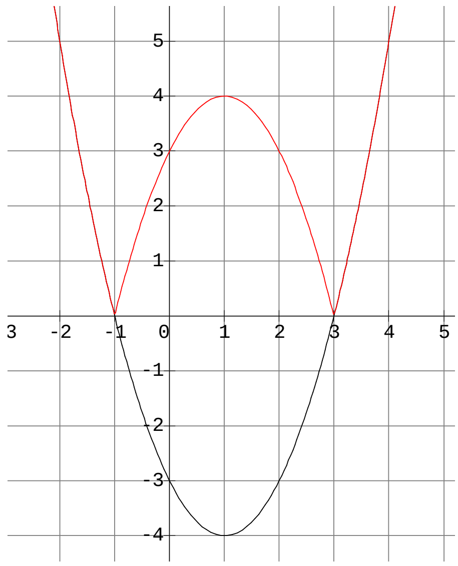
x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
Signe de x^2-2x-3		$+$	0	$-$	0	$+$	

2)

a. g est une fonction polynôme donc est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x)=2x-2$. g' s'annule en 1 donc g est décroissante sur $]-\infty;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$.

b. g admet un minimum local en 1 égal à -4.

c. Voir la courbe en noir.



3)

a. Pour $x\in]-\infty,-1]\cup[3;+\infty[$, g est positive donc $|g(x)|=g(x)$.
Pour $x\in[-1;3]$, g est négative donc $|g(x)|=-g(x)$.

Finalement : $\boxed{f(x)=\begin{cases}g(x)\text{ si }x\in]-\infty;-1]\cup[3;+\infty[\\ -g(x)\text{ si }x\in]-1;3[\end{cases}}$

b. Sur $]-\infty;-1]$, $f(x)=g(x)$ donc les variations de f sont les mêmes que celles de g et alors f est décroissante.
Sur $[-1;1]$, $f(x)=-g(x)$ donc les variations de f sont l'inverse de celles de g et f est croissante.
Sur $[1;3]$, $f(x)=-g(x)$ donc les variations de f sont l'inverse de celles de g et f est décroissante.
Sur $[3;+\infty[$, $f(x)=g(x)$ donc les variations de f sont les mêmes que celles de g donc f est croissante.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
Variations de f		$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	

c. Voir la courbe en rouge.

d. f admet deux minimums locaux, en -1 et en 3 et un maximum local, en 1.

Exercice 5

1) $(x-3)(x^2+6x+18)=x^3+6x^2+18x-3x^2-18x-54=x^3+3x^2-54$

2)

Signe de $x^2+6x+18$: $\Delta=6^2-4\times18=-36$ donc $x^2+6x+18$ est du signe de $a=1$ donc x^3+3x^2-54 est du signe de $x-3$:

x	$-\infty$		3		$+\infty$
Signe de $P(x)$		$-$	0	$+$	

3)

a. 4200 pièces correspond à 4,2milliers de pièces par jour or $f(4{,}2)=\frac{4{,}2^3+6\times4{,}2^2+12\times4{,}2+108}{12\times4{,}2}=\frac{338{,}328}{50{,}4}=$

Donc le prix de revient d'une pièces pour la production de 4200 pièces par jour est de

$4200\times=$ donc le coût engendré par la production de 4200 pièces est de

b. f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u:q\mapsto q^3+6q^2+12q+108$ dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $u'(q)=3q^2+12q+12$ et $v:q\mapsto 12q$ dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $v'(q)=12$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}-\{0\}$ et

$$f'(q)=\frac{u'(q)v(q)-u(q)v'(q)}{v(q)^2}=\frac{(3q^2+12q+12)\times12q-12(q^3+6q^2+12q+108)}{(12q)^2}$$

$$=\frac{36q^3+144q^2+144q-12q^3-72q^2-144q-1296}{144q^2}=\frac{24q^3+72q^2-1296}{144q^2}=\frac{24(q^3+3q^2-54)}{144q^2}$$

Donc on a bien $\boxed{f'(q)=\frac{24P(q)}{144q^2}}$

c. $f'(q)$ est clairement du signe de $P(q)$.

q	0		3		5
Signe de $P(q)$		$-$	0	$+$	
Variations de f		↘		↗	

d. D'après le tableau de variations précédent, le prix de revient est minimal pour $q_0=3$ donc pour la production de 3000 pièces. Il est alors de

$\times 3000=$ donc le coût total de production est de