Exercices supplémentaires : Suites

Partie A : Calculs de termes et représentation graphique

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = n^2 - 4n - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Calculer u_0, u_1, u_2 et u_3

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = 2u_n + n - 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = -2$.
Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.

Exercice 3

On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 8$, $v_1 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = \frac{v_{n+2} - v_n}{2}$$

Calculer v_2, v_3, v_4 et v_5.

Exercice 4

Représenter graphiquement les points d'affixe u_n pour n entre 0 et 7 dans chacun des cas suivants :

a) $u_n = 2n - 1$
b) $u_n = n^2 - 4n - 5$
c) $u_n = (-1)^n$

Exercice 5

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$$

1) Donner l'expression de la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.
2) Représenter graphiquement la courbe de la fonction f sur l'intervalle $[-1; 5]$ (unité graphique 3 cm)
3) Représenter graphiquement les cinq premiers termes de la suite (u_n).
4) Quelle conjecture peut-on émettre sur les variations de (u_n) ?

Exercice 6

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{1 + u_n}{u_n}$$

1) Donner l'expression de la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.
2) Représenter graphiquement la courbe de la fonction f sur l'intervalle $]0; 4]$ (unité graphique 3 cm)
3) Représenter graphiquement les cinq premiers termes de la suite (u_n).
4) Quelle conjecture peut-on émettre sur les variations de (u_n) ?

Exercice 7

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = -3n + 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Exprimer u_{n+1} en fonction de n.
2) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

Exercice 8

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = -n^2 + 2n$ et $v_n = u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Exprimer u_{n+1} en fonction de n.
2) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
3) Exprimer v_{n+1} en fonction de n.
4) En déduire que $v_{n+1} - v_n = -2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie B : Variations d'une suite

Exercice 1

Etudier le sens de variations de la suite (u_n) définie par

1) $u_n = n^2$ pour $n \in \mathbb{N}$

2) $u_n = 3n - 5$ pour $n \in \mathbb{N}$
3) $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
4) $u_n = -\frac{2}{n+4}$ pour $n \in \mathbb{N}$
5) $u_n = \frac{n}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$
6) $u_n = \frac{5^n}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
7) $u_n = 2n^2 - 1$ pour $n \in \mathbb{N}$
8) $u_n = \frac{3^n}{2n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{n^2+1}{2n^2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Etudier le sens de variations de (u_n).
2) Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $u_n \leq 1$.

Exercice 3

On considère (u_n) définie par $u_n = \frac{2n-1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Etudier le sens de variations de (u_n).
2) Représenter graphiquement les quatre premiers termes de la suite.
3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $-1 \leq u_n \leq 2$.
4) A partir de quel entier n tous les termes de la suite sont-ils compris entre 1,5 et 2 ? Justifier.

Exercice 4

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{2^n}{n^2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.
2) La suite est-elle monotone ?
3) Résoudre l'inéquation $n^2 - 2n - 1 \geq 0$ dans $\mathbb{N}$.
4) Quel est le sens de variations de (u_n) à partir du rang 3 ?
5) Déterminer un entier n_0 tel que $u_{n_0} \geq 10^{50}$.
6) Justifier que pour tout $n \geq n_0$, on a $u_n \geq 10^{50}$.

Exercice 5

On lance un dé cubique bien équilibré. On répète n fois cette expérience de façon identique et indépendante.

1) Justifier que la probabilité p_n d'obtenir au moins une fois 6 est $p_n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$.
2) Déterminer le sens de variations de (p_n). Interpréter dans la situation donnée.
3) Déterminer un nombre n_0 de lancers pour lequel la probabilité d'obtenir au moins un 6 est supérieure à 0,5.
4) Pourquoi est-on sûr que pour $n \geq n_0$, on a $p_n \geq 0{,}5$?
5) Combien de lancers doit-on effectuer pour que la probabilité d'obtenir au moins un 6 soit supérieure à 0,6 ? 0,8 ? 0,9 ? 0,95 ? 0,99 ?

Exercice 6

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = 0{,}9^n$ pour $n \geq 1$.

1) Déterminer le sens de variations de ces deux suites .
2) A l'aide d'une représentation graphique, conjecturer leurs limites et les comparer.
3) Déterminer un entier n_0 tel que $v_{n_0} \leq u_{n_0}$.
4) Justifier que si pour un entier $q \geq 34$, on a $v_q < u_q$ alors $v_{q+1} < \frac{0{,}9}{q} < u_{q+1}$.
5) Comparer alors v_{100} et u_{100} puis v_{1000} et u_{1000}.

Partie C : Suite arithmétique

Exercice 1

On considère la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $r = 3$.

Calculer u_1, u_2, u_{10} et u_{30}.

Exercice 2
On considère la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 763$ et de raison $r = -2$.
Calculer u_{10} et u_{2013}.

Exercice 3
On considère une suite arithmétique (u_n) telle que $u_3 = 7$ et $u_7 = 19$.
Calculer u_0 et la raison r.

Exercice 4
Dans chacun des cas suivants, déterminer si (u_n) est arithmétique ou non.
1) $u_0 = 8$ et $u_{n+1} = -u_n + 2$ pour $n \in \mathbb{N}$
2) $u_0 = -7$ et $u_{n+1} = u_n - 5$ pour $n \in \mathbb{N}$
3) $u_n = \frac{7}{2}n - 3$ pour $n \in \mathbb{N}$
4) $u_n = n^2 + 7n$ pour $n \in \mathbb{N}$

Exercice 5
On considère la suite arithmétique (u_n) de premier terme$u_0 = 3$ et de raison 2.
Calculer $u_0 + u_1 + \cdots + u_{22}$.

Exercice 6
On considère la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 653$ et de raison $-\frac{3}{2}$.
Calculer $u_0 + u_1 + \cdots + u_{871}$.

Exercice 7
On considère la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_1 = 2$ et de raison $\frac{5}{4}$.
1) Exprimer u_n en fonction de n.
2) Combien vaut u_{40} ?
3) Existe-t-il un entier n tel que $u_n = 772$?

Exercice 8
Sans utiliser la calculatrice, comparer
$$A = 2012(1 + 2 + \cdots + 2013) \quad \text{et} \quad B = 2013(1 + 2 + \cdots + 2012)$$

Exercice 9
On considère la suite arithmétique (u_n) de raison négative.
On sait que la somme des trois premiers termes vaut 81 et que leur produit vaut 18360.
1) On note r la raison de cette suite. Exprimer u_0 et u_2 en fonction de u_1 et r.
2) Montrer qu'on a le système suivant :
$$\begin{cases} 3u_1 = 81 \\ u_1^3 - r^2 u_1 = 18360 \end{cases}$$
3) En déduire la valeur de r et de u_1.
4) Calculer u_{40}.

Exercice 10
On considère une suite arithmétique (u_n) de raison positive. On sait que la somme des trois premiers termes vaut 60 et que la somme de leur carré vaut 1218.
Déterminer la raison et le premier terme de cette suite.

Exercice 11
On souhaite répartir 10kg de blé entre 10 hommes en parts inégales de telle sorte que la différence entre un homme et son voisin se monte à 1/8 de kg de blé.
On notera $u_1, u_2, \dots, u_{10}$ la part reçu respectivement par le 1er homme, le 2ème homme, …, le 10ème homme.
1) Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
2) Déterminer la raison de cette suite.
3) En déduire la valeur des termes $u_1, u_2, \dots, u_{10}$.

Exercice 12

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n}{2 + 3u_n}$$

1) Calculer u_1 et u_2.
2) La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Justifier.
3) On suppose que pour tout n, $u_n \neq 0$ et on définit une suite (v_n) telle que $v_n = \frac{1}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que (v_n) est arithmétique et donner les éléments caractéristiques.

4) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n et en déduire l'expression de u_n en fonction de n.
5) Etudier les variations de la suite (u_n).
6) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leq 1$.

Exercice 13

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que la suite (v_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n^2$ est arithmétique.
2) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n et en déduire l'expression de u_n en fonction de n.
3) Déterminer la plus petite valeur de n telle que $u_n \geq 50$.

<u>Partie D : Suite géométrique</u>

Exercice 1

On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = -2$.
Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.

Exercice 2

La suite (u_n) est-elle géométrique ? Justifier.

1) $u_n = 3^{n+1}$
2) $u_n = n^2$
3) $u_n = 2 \times 5^{n+1}$
4) $u_n = -5^{n-2}$

Exercice 3

En 2010, un article coûte 8,20€. Il augmente chaque année de 1%. On note p_n le prix de l'article à l'année 2010+n.

1) Donner p_0. Calculer p_1 et p_2.
2) Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n. En déduire la nature de la suite (p_n).
3) Exprimer p_n en fonction de n puis calculer le prix de l'article en 2025.

Exercice 4

Un capital de 6500€ est bloqué pour 10 ans sur un compte rapportant un intérêt annuel de 4%. Cet intérêt est versé sur le compte à la fin de chaque année. On appelle C_0 le capital de départ et pour $n \geq 1$, C_n représente le montant figurant sur le compte au bout de la $n - ième$ année.

1) Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n.
2) Quel sera le capital au bout de 5 ans ?
3) Faire afficher la liste des premiers termes de la suite (C_n) à la calculatrice et lire le nombre d'années nécessaires pour que le capital ait augmenté de 50%.

Exercice 5

Déterminer le sens de variations de la suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q :

1) $u_0 = 2$ et $q = 3$
2) $u_0 = -2$ et $q = 3$
3) $u_0 = -4$ et $q = 2$
4) $u_0 = 12$ et $q = -\frac{1}{2}$

Exercice 6

Calculer les sommes

$A = 1 + 3 + 9 + 27 + \cdots + 3^{20}$

$B = 1 - 2 + 4 - 8 + \cdots + 1024$

$C = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{10}}$

Exercice 7
Calculer la somme des 20 premiers termes de la suite géométrique de premier terme 3 et de raison 1,05.

Exercice 8
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n - 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 5 - u_n$.

1) Calculer les trois premiers termes de la suite (v_n).
2) Quelle est la nature de la suite (v_n). Démontrer le résultat.
3) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
4) Etudier le sens de variations de la suite (u_n).

Exercice 9
On considère la suite (w_n) définie pour tout n dans $\mathbb{N}$ par :

$$w_0 = -1\,;\, w_1 = \frac{1}{2} \text{ et pour tout entier naturel } n, w_{n+2} = w_{n+1} - \frac{1}{4}w_n$$

1) Calculer w_2 et en déduire que la suite (w_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
2) On définit la suite (u_n) en posant pour tout entier naturel n, $u_n = w_{n+1} - \frac{1}{2}w_n$.
   a. Calculer u_0.
   b. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
   c. En déduire que la nature de la suite (u_n).
   d. Exprimer u_n en fonction de n.
3) On définit la suite (v_n) en posant pour tout entier naturel n, $v_n = \frac{w_n}{u_n}$.
   a. Calculer v_0.
   b. En utilisant l'égalité $w_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}w_n$, exprimer v_{n+1} en fonction de u_n et de w_n.
   c. En déduire la nature de la suite (v_n).
   d. Exprimer v_n en fonction de n.
4) Montrer que pour tout entier naturel n, $w_n = \frac{2n-1}{2^n}$.

Exercice 10
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = 7u_n + 8u_{n-1}$.
On considère la suite (S_n) définie par $S_n = u_{n+1} + u_n$ pour tout entier naturel n.
Montrer que (S_n) est géométrique et en déduire l'expression de $u_{n+1} + u_n$ en fonction de n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 11
On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \quad \text{pour } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Déterminer le réel a pour que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n + a$ pour $n \in \mathbb{N}$ soit géométrique.
2) Exprimer alors v_n puis u_n en fonction de n pour $n \in \mathbb{N}$
3) Calculer les sommes $v_0 + v_1 + \cdots + v_{10}$ puis $u_0 + u_1 + \cdots + u_{10}$.

Exercice 12
On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 2$, $u_2 = 3$ et pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = 3u_{n-1} - 2u_n$.

1) On pose $v_n = u_{n+1} - u_n$ pour tout entier naturel non nul n. Quelle est la nature de (v_n) ?
2) En déduire l'expression de v_n en fonction de n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3) Montrer par récurrence que $u_{n+1} - u_1 = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
4) En déduire l'expression de u_n en fonction de n pour $n \in \mathbb{N}$.

Partie E : Bilan

Exercice 1

Partie 1

On considère l'algorithme suivant :

> ***Entrée*** *:* *n* un entier naturel.
> ***Initialisation*** *:* affecter à *u* la valeur 1 ;
> affecter à *S* la valeur 1 ;
> affecter à *i* la valeur 0.
> ***Traitement*** *:* tant que *i* < *n*
> affecter à *u* la valeur 2*u* +1−*i* ;
> affecter à *S* la valeur *S* +*u* ;
> affecter à *i* la valeur *i* +1.
> ***Sortie*** *:* afficher *u* ;
> afficher *S*.

1) Justifier que, pour *n* = 3, l'affichage obtenu est 11 pour *u* et 21 pour *S*.
2) Reproduire et compléter le tableau suivant :

Valeur de n	0	1	2	3	4	5
Affichage pour u						
Affichage pour S						

Partie 2

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n + 1 - n$ et la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

1) Pour un entier naturel n donné, que représentent les valeurs affichées par l'algorithme de la partie 1 ?
2) Le but de cette question est d'exprimer u_n en fonction de n.
   a. Recopier et compléter le tableau ci-dessous :

n	0	1	2	3	4	5
u_n						
$u_n - n$						

   b. Quelle conjecture peut-on faire à partir des résultats de ce tableau ?
   c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = 2^n + n$.
3) Le but de cette question est de calculer S_n en fonction de n et d'utiliser un résultat de la première partie pour contrôler l'exactitude de ce calcul.
   a. Exprimer en fonction de n les sommes : $1 + 2 + \cdots + n$ et $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n$.
   b. En déduire une expression de S_n en fonction de n.
   c. Vérifier le résultat obtenu dans la première partie pour $n = 5$.

Exercice 2

Soit la suite U de terme général U_n définie par $U_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, par :
$U_{n+1} = U_n + 2(n + 1)$.

1) Calculer U_1; U_2 et U_3.
2) Chacune des trois propositions suivantes est-elle vraie ou fausse ? Justifier les réponses.

Proposition 1 : « La suite U est arithmétique. »
Proposition 2 : « Il existe au moins une valeur de n pour laquelle $U_n = n^2 + 1$. »
Proposition 3 : « Pour toutes les valeurs de n, on a $U_n = n^2 + 1$. »

3) On considère l'algorithme suivant :

> **Entrée** : N un entier naturel non nul
> **Initialisation** : P = 0
> **Traitement** : Pour K allant de 0 à N :
> Affecter à P la valeur P + K
> Afficher P
> **Fin de l'algorithme**

a. Faire fonctionner cet algorithme avec N = 3. Obtient-on à l'affichage les valeurs des quatre premiers termes de la suite U ?
b. Modifier cet algorithme de manière à obtenir à l'affichage les valeurs des N premiers termes de la suite U.

4) Montrer que, pour tout entier naturel k, $(k^2 + k) + 2(k + 1) = (k + 1)^2 + k + 1$
5) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $U_n = n^2 + n$.

Exercice 3

On considère la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par $u_1 = 16$; $u_2 = 1156$; $u_3 = 111556$
$u_4 = 11115556$; $u_5 = 1111155556$; …

1) Vérifier que $u_1; u_2, u_3, u_4$ et u_5 sont des carrés parfaits.
2) Calculer $S_n = 10 + 10^2 + \cdots + 10^{n-1}$ pour $n \geq 2$
3) Calculer $T_n = 10^n + 10^{n+1} + \cdots + 10^{2n-1}$ pour $n \geq 2$
4) Justifier que $u_n = T_n + 5S_n + 6$ pour $n \geq 2$
5) En déduire une expression de u_n en fonction de n.
6) Vérifier que pour tout $n \geq 2$, on a $u_n = \left(\frac{2+10^n}{3}\right)^2$.
7) Est-il vrai que pour tout $n \geq 2$, u_n est un carré d'entier ? Justifier.

Exercice 4

Dans un disque de rayon 1, on trace un premier secteur qui est un demi-disque. Le deuxième secteur est la moitié du premier, le troisième est la moitié du deuxième, …
Quelle portion du disque représente l'aire du $n - ième$ secteur ?
Quelle portion du disque représente l'aire des n premiers secteurs ?
Combien de secteurs faut-il tracer pour recouvrir au moins 90% du disque ? 95% ? 99% ?
Quelles limites conjecture-t-on pour la suite des aires des secteurs ? des aires totales des secteurs ?

Exercice 5

On considère $n + 1$ sphères concentriques de rayons respectifs $1; 2; \ldots; n; n + 1$.

1) Déterminer le volume V de la plus grosse boule.
2) On appelle V_k le volume délimité par les sphères de rayons k et $k + 1$.
   a. Montrer que $V_k = \frac{4}{3}\pi(3k^2 + 3k + 1)$.
   b. Exprimer V en fonction des V_k.
   c. En déduire que $(n + 1)^3 = 3(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) + 3(1 + 2 + \cdots + n) + n + 1$
   d. Prouver que $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Exercice 6

On considère la suite (u_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

1) Calculer les quatre premiers termes.
2) Justifier que (u_n) est strictement croissante.
3) Prouver que pour $k \geq 2$, on a $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.
4) En sommant ces inégalités pour k variant de 2 à n, établir que $u_n < 2 - \frac{1}{n}$.
5) La suite (u_n) peut-elle tendre vers $+\infty$?

On admet que la suite (u_n) converge vers le réel $a = \frac{\pi^2}{6}$.

6) Donner une valeur approchée par défaut à 10^{-3} de a.
7) A l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de quel entier n, on a $u_n > 1{,}64$.

Exercice 7

On suppose que sur une période donnée, la population d'un pays est constante et égale à 60 millions d'habitants. Ces habitants vivent soit en zone rurale, soit en ville et on constate que les mouvements de population sont décrits par la règle suivante : chaque année, 20% des ruraux émigrent en ville et 10% des citadins émigrent en zone rurale. Au 1er janvier 2010, on compte 20 millions de citadins et 40 millions de ruraux.
On note respectivement V_n et R_n les effectifs (en millions) des citadins et des ruraux, au bout de n années. On a donc $V_0 = 20$ et $R_0 = 40$.

1) Montrer que $\begin{cases} V_{n+1} = 0{,}9V_n + 0{,}2R_n \\ R_{n+1} = 0{,}1V_n + 0{,}8R_n \end{cases}$
2) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = R_n + V_n$.
   a. Expliquer à l'aide du contexte pourquoi (S_n) est une suite constante ?
   b. Retrouver ces résultats par un calcul et donner la valeur de S_n pour $n \in \mathbb{N}$.

c. En déduire que $\begin{cases} V_{n+1} = 0{,}7V_n + 12 \\ R_{n+1} = 0{,}7R_n + 6 \end{cases}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

3) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = V_n - 40$.

   a. Prouver que (W_n) est géométrique et donner l'expression de W_n en fonction de n.
   b. En déduire que $V_n = 40 - 20 \times 0{,}7^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   c. Déterminer l'expression de R_n en fonction de n.
   d. Déterminer les variations de (V_n) et (R_n).
   e. Au bout de combien d'années, aura-t-on $V_n \geq R_n$? $V_n \geq 39$? $R_n \leq 22$?

Correction Exercices supplémentaires : Suites

<u>Partie A : Calculs de termes et représentation graphique</u>

Exercice 1

$u_0 = 0^2 - 4 \times 0 - 3 = \boxed{-3}$ $u_1 = 1^2 - 4 - 3 = \boxed{-6}$ $u_2 = 2^2 - 4 \times 2 - 3 = \boxed{-7}$ $u_3 = 3^2 - 4 \times 3 - 3 = \boxed{-6}$

Exercice 2

$u_1 = 2u_0 + 0 - 4 = 2 \times (-2) - 4 = \boxed{-8}$ $u_2 = 2u_1 + 1 - 4 = 2 \times (-8) - 3 = \boxed{-19}$

$u_3 = 2u_2 + 2 - 4 = 2 \times (-19) - 2 = \boxed{-40}$ $u_4 = 2u_3 + 3 - 4 = 2 \times (-40) - 1 = \boxed{-81}$

Exercice 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$v_{n+1} = \dfrac{v_{n+2} - v_n}{2} \Leftrightarrow 2v_{n+1} = v_{n+2} - v_n \Leftrightarrow v_{n+2} = 2v_{n+1} + v_n$

Donc $v_2 = 2v_1 + v_0 = 2 \times 4 + 8 = \boxed{16}$

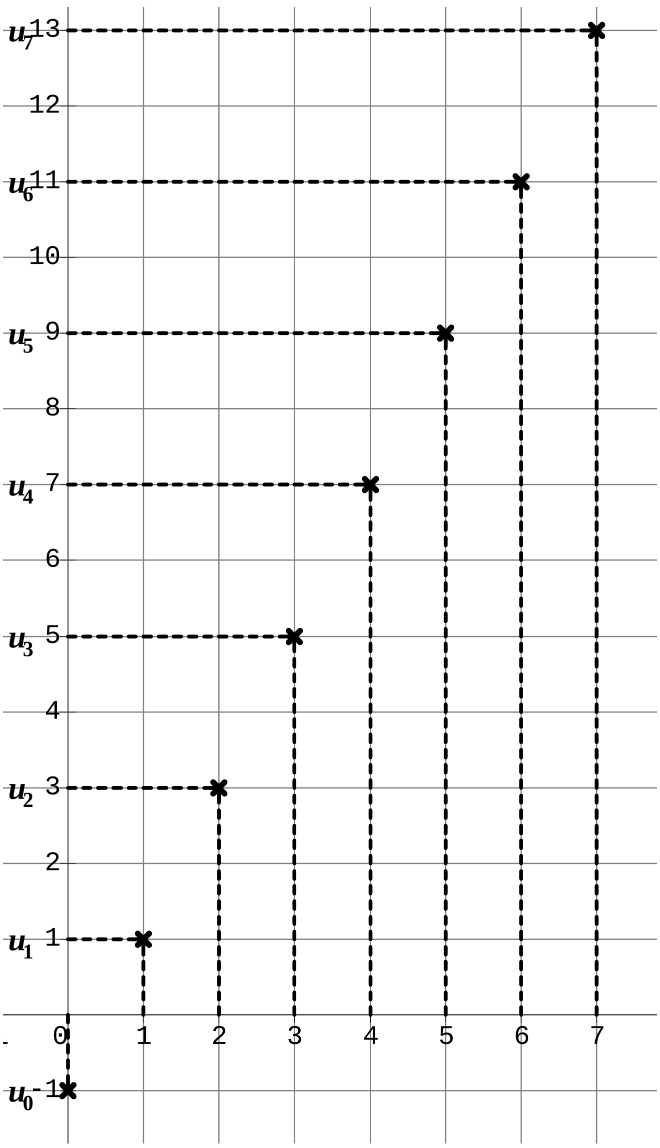
$v_3 = 2v_2 + v_1 = 2 \times 16 + 4 = \boxed{36}$

$v_4 = 2v_3 + v_2 = 2 \times 36 + 16 = \boxed{88}$

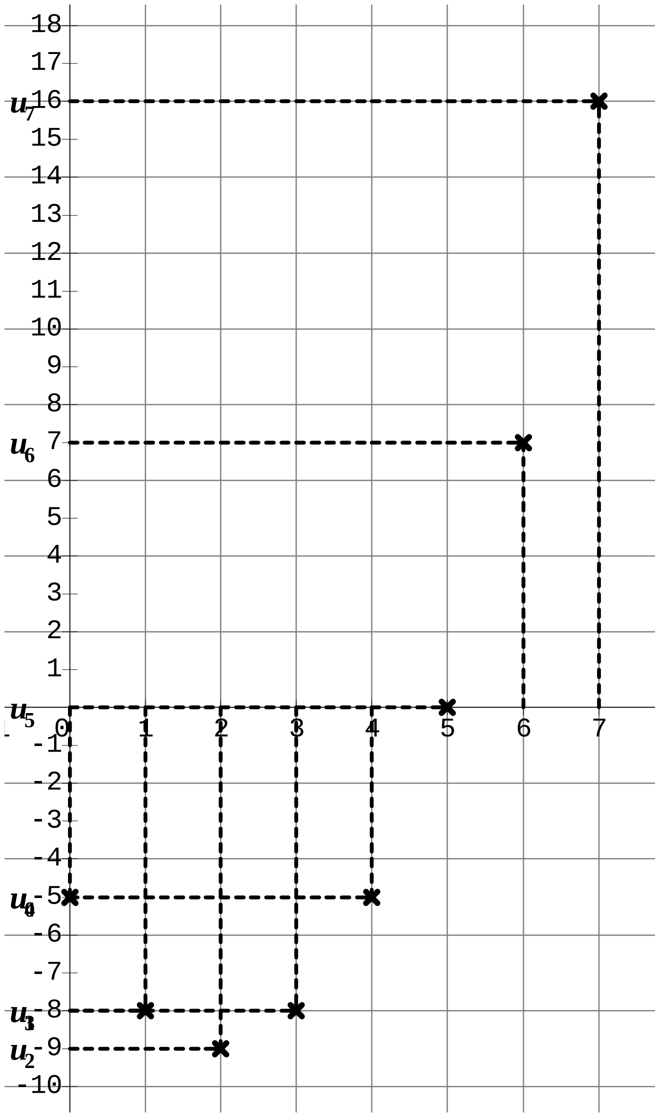
$v_5 = 2v_4 + V_3 = 2 \times 88 + 36 = \boxed{212}$

Exercice 4

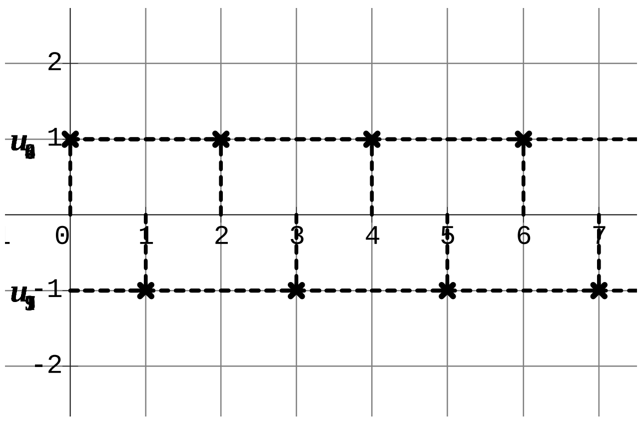
a) $u_n = 2n - 1$



b) $u_n = n^2 - 4n - 5$

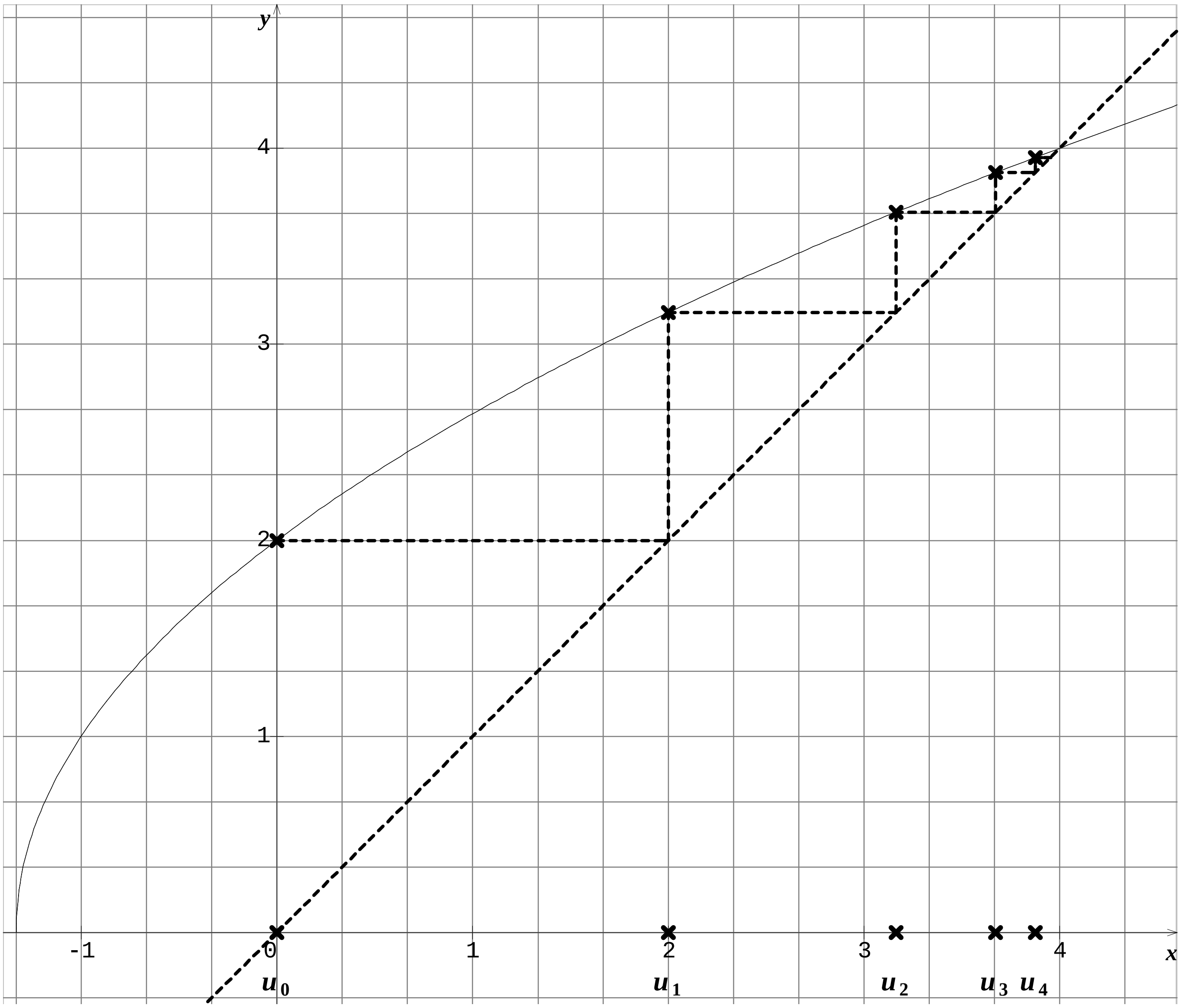


c) $u_n = (-1)^n$



Exercice 5

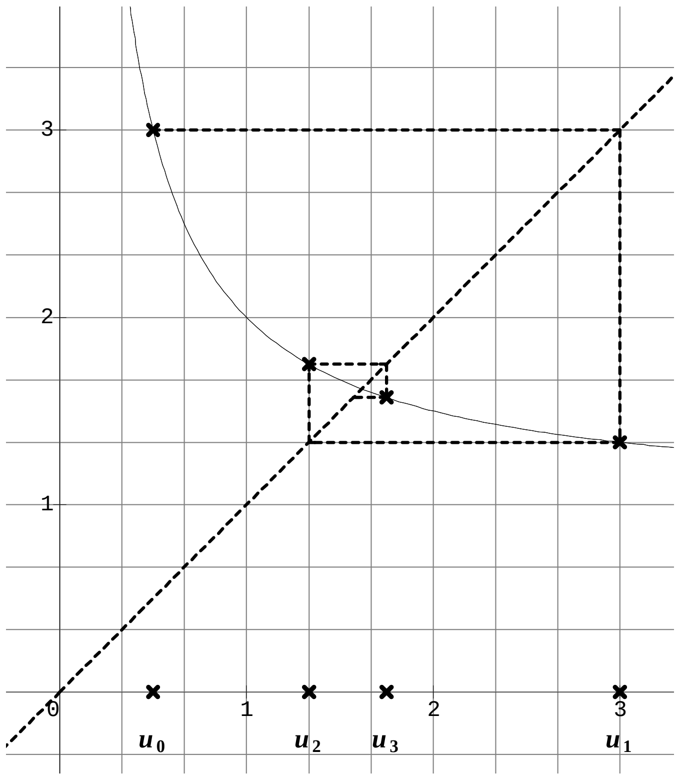
1) $f : x \mapsto \sqrt{3x+4}$ définie sur $\left]-\frac{4}{3} ; +\infty\right[$
2)



3) Voir ci-dessus
4) D'après le graphique, il semble que la suite (u_n) soit croissante.

Exercice 6

1) $f: x \mapsto \frac{1+x}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$. On a donc $f(x) = \frac{1}{x} + 1$.
2)
3) Voir ci-contre
4) Il semble que la suite (u_n) ne soit pas monotone : $u_1 > u_0$ et $u_2 < u_1$…



Exercice 7

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$u_{n+1} = -3(n+1) + 4 = \boxed{-3n+1}$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = -3n + 4 \Leftrightarrow 3n = 4 - u_n \Leftrightarrow n = \frac{4 - u_n}{3}$$

Et donc

$$u_{n+1} = -3n + 1 = -3 \times \frac{4 - u_n}{3} + 1 = -(4 - u_n) + 1$$

$$= \boxed{u_n - 3}$$

Exercice 8

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$u_{n+1} = -(n+1)^2 + 2(n+1) = -n^2 - 2n - 1 + 2n + 2 = \boxed{-n^2+1}$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$v_n = u_{n+1} - u_n = -n^2 + 1 - (-n^2 + 2n) = -n^2 + 1 + n^2 - 2n = \boxed{-2n+1}$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$v_{n+1} = -2(n+1) + 1 = \boxed{-2n-1}$

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$v_{n+1} - v_n = -2n - 1 - (-2n+1) = -2n - 1 + 2n - 1 = \boxed{-2}$

Partie B : Variations d'une suite

Exercice 1

1) Pour $n \in \mathbb{N}$

$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1 \geq 0$ car n est un entier positif

Donc (u_n) est croissante.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$ avec $f : x \mapsto 3x - 5$ qui est une fonction affine avec $a = 3 > 0$ donc f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ et donc (u_n) est croissante.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{1}{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{n+1} - 1 - \frac{1}{n} = \frac{n}{n(n+1)} - \frac{n+1}{n(n+1)} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0$$

Donc (u_n) est décroissante.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{2}{n+1+4} - \left(-\frac{2}{n+4}\right) = -\frac{2}{n+5} + \frac{2}{n+4} = \frac{-2(n+4) + 2(n+5)}{(n+4)(n+5)} = \frac{2}{(n+4)(n+5)} > 0$$

Donc (u_n) est croissante.

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2\ )} > 0$$

Donc (u_n) est croissante.

6) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{5^{n+1}}{n+1} - \frac{5^n}{n} = \frac{5^{n+1} \times n - 5^n(n+1)}{n(n+1)} = \frac{5^n(5n - n - 1)}{n(n+1)} = \frac{5^n(4n-1)}{n(n+1)} > 0$$

Donc (u_n) est croissante.

7) Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$u_{n+1} - u_n = 2(n+1)^2 - 1 - (2n^2 - 1) = 2n^2 + 4n + 2 - 1 - 2n^2 + 1 = 4n + 2 > 0$

Donc (u_n) est croissante.

8) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3^{n+1}}{2(n+1)} - \frac{3^n}{2n} = \frac{3^{n+1} \times n - 3^n \times (n+1)}{2n(n+1)} = \frac{3^n(3n - n - 1)}{2n(n+1)} = \frac{3^n(2n-1)}{2n(n+1)} > 0$$

Donc (u_n) est croissante.

Exercice 2

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)^2 + 1}{2(n+1)^2} - \frac{n^2+1}{2n^2} = \frac{(n^2 + 2n + 2) \times n^2 - (n^2+1)(n^2 + 2n + 1)}{2n^2(n+1)^2}$$

$$= \frac{n^4 + 2n^3 + 2n^2 - n^4 - 2n^3 - n^2 - n^2 - 2n - 1}{2n^2(n+1)^2} = \frac{-2n-1}{2n^2(n+1)^2} < 0$$

Donc (u_n) est décroissante.

2) Pour tout $n \geq 1$

$$u_n - 1 = \frac{n^2+1}{2n^2} - \frac{2n^2}{2n^2} = \frac{1 - n^2}{2n^2} = \frac{(1-n)(1+n)}{2n^2}$$

Or $1 - n$ est négatif car $n \geq 1$.

$1 + n$ et $2n^2$ sont positifs donc $u_n - 1$ est négatif et donc $u_n \leq 1$ pour tout $n \geq 1$.

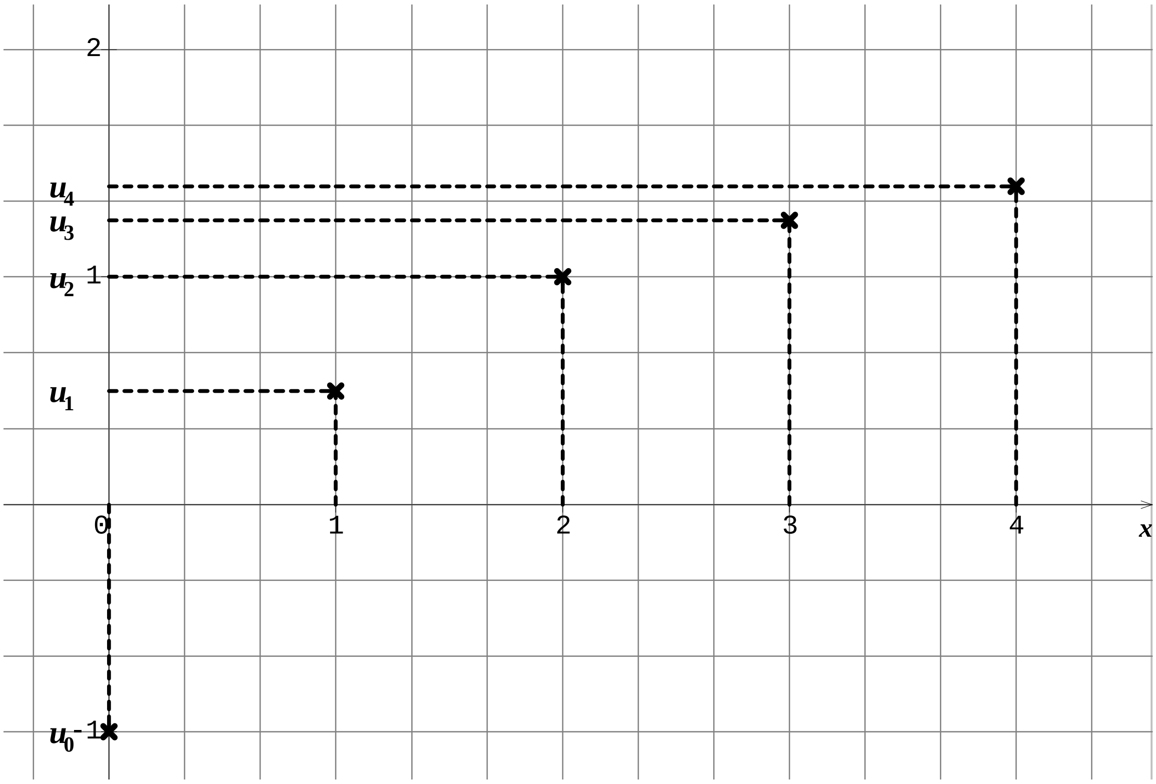
Exercice 3

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = f(n)$ avec $f : x \mapsto \frac{2x-1}{x+1}$ définie sur $[0; +\infty[$.

f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u : x \mapsto 2x - 1$ dérivable sur $[0; +\infty[$ et $v : x \mapsto x + 1$ dérivable et non nul sur $[0; +\infty[$ donc f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et

$f'(x) = \frac{2(x+1)-(2x-1)}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2} > 0$ donc f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ et donc (u_n) est croissante.

2)



3) $u_0 = -1$ et comme (u_n) est croissante, on a $u_n \geq u_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $u_n \geq -1$.

Par ailleurs :

$$u_n - 2 = \frac{2n-1}{n+1} - \frac{2(n+1)}{n+1} = \frac{2n-1-2n-2}{n+1} = -\frac{3}{n+1} < 0$$

Donc $u_n \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) D'après la question précédente, on a toujours $u_n \leq 2$. On cherche donc n tel que $u_n \geq 1{,}5$.

$$u_n \geq 1{,}5 \Leftrightarrow \frac{2n-1}{n+1} \geq 1{,}5 \Leftrightarrow 2n - 1 \geq 1{,}5(n+1) \quad \text{car } n+1 > 0$$

$$\Leftrightarrow 0{,}5n \geq 2{,}5 \Leftrightarrow n \geq 5$$

A partir du rang 5, les termes u_n sont compris entre 1,5 et 2.

Exercice 4

1) $u_1 = \frac{2^1}{1^2} = \boxed{2}$ $\quad u_2 = \frac{2^2}{2^2} = \boxed{1}$ $\quad u_3 = \frac{2^3}{3^2} = \boxed{\frac{8}{9}}$ $\quad u_4 = \frac{2^4}{4^2} = \boxed{1}$ $\quad u_5 = \frac{2^5}{5^2} = \boxed{\frac{32}{25}}$

2) (u_n) n'est pas monotone car $u_2 > u_3$ et $u_3 < u_4$.

3) $n^2 - 2n - 1 \geq 0$: $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-1) = 8$ donc il y a deux racines $n_1 = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2} \approx 2{,}4$ et $n_2 = 1 - \sqrt{2} \approx -0{,}4$. Le signe de $n^2 - 2n - 1$ est du signe de $a = 1$ sauf entre les racines donc entre 0 et 2.

A partir de 3, $n^2 - 2n - 1$ est donc positif. Les solutions sont donc les entiers supérieurs ou égaux à 3.

4) Pour $n \geq 3$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{2^n}{n^2} = \frac{2^{n+1} \times n^2 - 2^n \times (n^2 + 2n + 1)}{n^2(n+1)^2} = \frac{2^n(2n^2 - n^2 - 2n - 1)}{n^2(n+1)^2} = \frac{2^n(n^2 - 2n - 1)}{n^2(n+1)^2}$$

D'après la question précédente, $n^2 - 2n - 1$ est positif. De plus 2^n et le dénominateur sont aussi clairement positif donc (u_n) est bien croissante à partir du rang 3.

5) $u_{n_0} \geq 10^{50}$: A la calculatrice : $u_{181} = \frac{2^{181}}{181^2} \approx 9{,}3 \times 10^{49}$ et $u_{182} \approx 1{,}8 \times 10^{50}$

Donc on peut choisir $n_0 = 182$.

6) Comme (u_n) est croissante à partir du rang 3, on a $u_n \geq u_{n_0}$ pour $n \geq n_0$ et donc pour $n \geq 182$, on a $u_n \geq 10^{50}$.

Exercice 5

1) On lance n fois le dé de façon indépendante et à chaque lancer, la probabilité d'avoir un 6 est $\frac{1}{6}$. Le nombre X de 6 suit donc une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{6}$.

$p_n = p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = \boxed{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n}$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$p_{n+1} - p_n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1} - \left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right] = \left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1} = \left(\frac{5}{6}\right)^n \left[1 - \frac{5}{6}\right] = \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^n > 0$

Donc (p_n) est croissante.

Concrètement, plus on lance le dé, plus la probabilité d'obtenir au moins un 6 grandit…

3) On cherche n_0 tel que $p_{n_0} \geq 0{,}5$ or $p_4 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296} > 0{,}5$ donc on peut choisir $n_0 = 4$

4) (p_n) est croissante donc pour $n \geq n_0$, on a $p_n \geq p_{n_0} \geq 0{,}5$.

5) Grâce à la calculatrice :

$p_5 \approx 0{,}598$ et $p_6 \approx 0{,}665$ donc il faut au moins 6 lancers pour que la probabilité d'avoir au moins un 6 dépasse 0,6.
De la même manière, il faut au moins 8 lancers pour que la probabilité d'avoir au moins un 6 dépasse 0,8 ;
il faut au moins 13 lancers pour que la probabilité d'avoir au moins un 6 dépasse 0,9 ;
il faut au moins 17 lancers pour que la probabilité d'avoir au moins un 6 dépasse 0,95 ;
il faut au moins 26 lancers pour que la probabilité d'avoir au moins un 6 dépasse 0,99.

Exercice 6

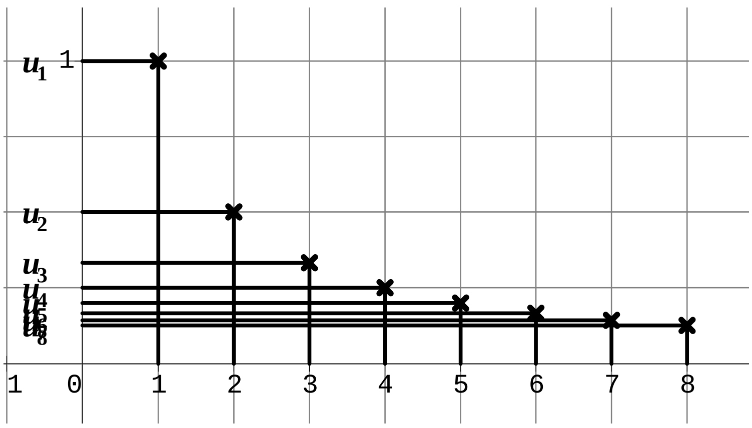
1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$ avec f la fonction inverse qui est décroissante sur $]0; +\infty[$ donc (u_n) est décroissante.

$v_{n+1} - v_n = 0{,}9^{n+1} - 0{,}9^n = 0{,}9^n(0{,}9 - 1) = -0{,}1 \times 0{,}9^n < 0$

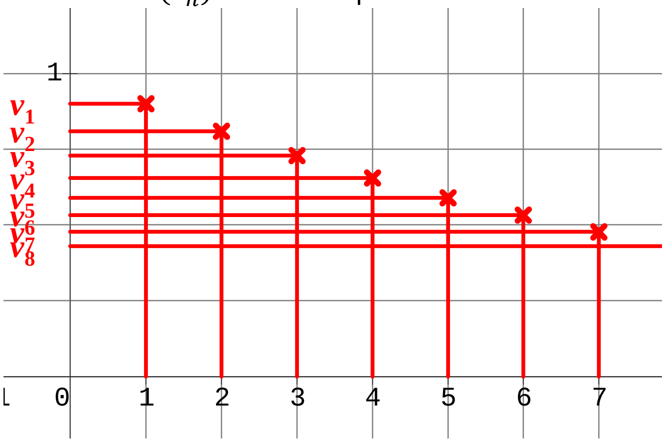
Donc (v_n) est décroissante.

2)

Pour la suite (u_n) : il semble que la limite soit 0.



Pour la suite (v_n) : il semble que la limite soit aussi 0.



Par ailleurs, il semble que $v_n \geq u_n$, au moins à partir d'un certain rang.

3) $u_1 = 1$ et $v_1 = 0{,}9$ donc $v_1 \leq u_1$. On peut donc choisir $n_0 = 1$.

4) On suppose qu'il existe un entier $q \geq 34$ tel que $v_q < u_q$. Alors

$v_{q+1} = 0{,}9^{q+1} = 0{,}9 \times 0{,}9^q = 0{,}9 \times v_q < 0{,}9 \times u_q$ or $u_q = \frac{1}{q}$ donc $v_{q+1} < \frac{0{,}9}{q}$

De plus, $u_{q+1} - \frac{0{,}9}{q} = \frac{1}{q+1} - \frac{0{,}9}{q} = \frac{q - 0{,}9(q+1)}{q(q+1)} = \frac{0{,}1q - 0{,}9}{q(q+1)} > 0$ car $q \geq 34$ donc $u_{q+1} > \frac{0{,}9}{q}$.

Finalement, on a bien $v_{q+1} < \frac{0{,}9}{q} < u_{q+1}$

5) $u_{34} \approx 0{,}0294$ et $v_{34} \approx 0{,}0278$ donc $v_{34} < u_{34}$.

D'après la question précédente, on a donc $v_{35} < u_{35}$ et de proche en proche, on a $v_{100} < u_{100}$ et $v_{1000} < u_{1000}$.

Partie C : Suite arithmétique

Exercice 1

$u_1 = u_0 + r = \boxed{7} \quad u_2 = \boxed{10}$

$u_{10} = u_0 + 10r = 4 + 30 = \boxed{34}$

$u_{30} = u_0 + 30r = 4 + 30 \times 3 = \boxed{94}$

Exercice 2

$u_{10} = u_0 + 10r = 763 - 20 = \boxed{743}$

$u_{2013} = u_0 + 2013r = 763 - 2013 \times 2 = \boxed{-3263}$

Exercice 3

$$\begin{cases} u_3 = u_0 + 3r \\ u_7 = u_0 + 7r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 = u_0 + 3r \\ 19 = u_0 + 7r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_0 = 7 - 3r \\ 19 = 7 - 3r + 7r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_0 = 7 - 3r \\ 4r = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} u_0 = -2 \\ r = 3 \end{cases}}$$

Exercice 4

1) $u_0 = 8$

$u_1 = -u_0 + 2 = -8 + 2 = -6$

$u_2 = -u_1 + 2 = 6 + 2 = 8$

Comme $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$, la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -5$ donc (u_n) est arithmétique de raison -5.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{7}{2}(n+1) - 3 - \left(\frac{7}{2}n - 3\right) = \frac{7}{2}n + \frac{7}{2} - 3 - \frac{7}{2}n + 3 = \frac{7}{2}$$

Le résultat ne dépend pas de n donc (u_n) est arithmétique de raison $\frac{7}{2}$.

4) $u_0 = 0 \qquad u_1 = 8 \qquad u_2 = 18$

$u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc (u_n) n'est pas arithmétique.

Exercice 5

(u_n) est arithmétique donc $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{u_0 + u_n}{2} \times (n+1)$:

De plus, $u_{22} = u_0 + 22r = 3 + 22 \times 2 = 47$

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_{22} = \frac{u_0 + u_{22}}{2} \times 23 = \frac{3 + 47}{2} \times 23 = \boxed{575}$$

Exercice 6

$$u_{871} = u_0 + 871r = 653 - \frac{3}{2} \times 871 = -\frac{1307}{2}$$

$$u_0 = u_1 + \cdots + u_{871} = \frac{u_0 + u_{871}}{2} \times 872 = \boxed{-218}$$

Exercice 7

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = u_0 + nr = \boxed{2 + \frac{5}{4}n}$

2) $u_{40} = 2 + \frac{5}{4} \times 40 = \boxed{52}$

3) $u_n = 772 \Leftrightarrow 2 + \frac{5}{4}n = 772 \Leftrightarrow \frac{5}{4}n = 770 \Leftrightarrow n = 770 \times \frac{4}{5} \Leftrightarrow n = 616$

   Donc il existe bien une valeur de n telle que $u_n = 772$.

Exercice 8

$$A = 2012 \times \frac{1 + 2013}{2} \times 2013 = \frac{2012 \times 2013 \times 2014}{2}$$

$$B = 2013 \times \frac{1 + 2012}{2} \times 2012 = \frac{2012 \times 2013 \times 2013}{2}$$

Comme $2013 < 2014$, on a $\boxed{A > B}$

Exercice 9

1) $u_1 = u_0 + r$ donc $\boxed{u_0 = u_1 - r}$ De plus, $\boxed{u_2 = u_1 + r}$

2) D'après l'énoncé : $u_0 + u_1 + u_2 = 81$ donc $u_1 - r + u_1 + u_1 + r = 81$ soit $3u_1 = 81$.
De plus $u_0 \times u_1 \times u_2 = 18360$ donc $(u_1 - r) \times u_1 \times (u_1 + r) = 18360$ soit $u_1(u_1^2 - r^2) = 18360$ et donc $u_1^3 - r^2 u_1 = 18360$. Finalement, on a bien le système

$$\begin{cases} 3u_1 = 81 \\ u_1^3 - r^2 u_1 = 18360 \end{cases}$$

3) Avec la première équation : $u_1 = 27$ et
$27^3 - 27r^2 = 18360 \Leftrightarrow 19683 - 27r^2 = 18360 \Leftrightarrow r^2 = 49 \Leftrightarrow r = 7$ ou$r = -7$
D'après l'énoncé, la raison est négative donc $r = -7$.

4) $u_{40} = u_0 + 40r = 27 - 7 \times 40 = \boxed{-253}$

Exercice 10

$u_1 = u_1 - r$ et $u_2 = u_1 + r$ donc $u_0 + u_1 + u_2 = 60 \Leftrightarrow u_1 - r + u_1 + u_1 + r = 60 \Leftrightarrow 3u_1 = 60 \Leftrightarrow u_1 = 20$
Et de plus :
$(u_1 - r)^2 + u_1^2 + (u_1 + r)^2 = 1218 \Leftrightarrow u_1^2 - 2ru_1 + r^2 + u_1^2 + u_1^2 + 2ru_1 + r^2 = 1218$
$\Leftrightarrow 3u_1^2 + 2r^2 = 1218 \Leftrightarrow 2r^2 = 1218 - 3 \times 20^2 \Leftrightarrow r^2 = 9 \Leftrightarrow r = 3$ ou $r = -3$
D'après l'énoncé, la raison est positive donc $\boxed{r = 3}$.
D'où $u_0 = u_1 - r = \boxed{17}$

Exercice 11

1) D'après l'énoncé, en considérant que (u_n) est croissante, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}$ pour n de 1 à 9.
(u_n) est donc arithmétique de raison $\frac{1}{8}$.

2) La raison est $\frac{1}{8}$

3)

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_{10} = 10 \Leftrightarrow \frac{u_1 + u_{10}}{2} \times 10 = 10 \Leftrightarrow u_1 + u_{10} = 2 \Leftrightarrow u_1 + u_1 + 9r = 2 \Leftrightarrow 2u_1 = 2 - \frac{9}{8}$$

$$\Leftrightarrow u_1 = \frac{7}{16}$$

On a donc $u_1 = \frac{7}{16}$; $u_2 = \frac{9}{16}$; $u_3 = \frac{11}{16}$.... $u_{10} = \frac{27}{16}$

Exercice 12

1)

$$u_1 = \frac{2u_0}{2 + 3u_0} = \boxed{\frac{2}{5}}$$

$$u_2 = \frac{2u_1}{2 + 3u_1} = \frac{2 \times \frac{2}{5}}{2 + 3 \times \frac{2}{5}} = \frac{4}{5} \times \frac{5}{16} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

2) $u_1 - u_0 = \frac{2}{5} - 1 = -\frac{3}{5}$ et $u_2 - u_1 = \frac{1}{4} - \frac{2}{5} = -\frac{3}{20}$ donc (u_n) n'est pas arithmétique.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{2 + 3u_n}{2u_n} = \frac{2}{2u_n} + \frac{3}{2} = \frac{1}{u_n} + \frac{3}{2} = v_n + \frac{3}{2}$$

Donc (v_n) est arithmétique de raison $\frac{3}{2}$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{u_0} = 1$.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = v_0 + nr = 1 + \frac{3}{2}n$
De plus, $u_n = \frac{1}{v_n}$ donc

$$u_n = \frac{1}{1 + \frac{3}{2}n} = \boxed{\frac{2}{2 + 3n}}$$

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{2 + 3(n+1)} - \frac{2}{2 + 3n} = \frac{2(2 + 3n) - 2(2 + 3n + 3)}{(2 + 3n)(2 + 3n + 3)} = \frac{-6}{(2 + 3n)(5 + 3n)} < 0$$

Donc (u_n) est décroissante.

6) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a clairement $u_n > 0$.
De plus, $u_n - 1 = \frac{2}{2+3n} - \frac{2+3n}{2+3n} = -\frac{3n}{2+3n} < 0$
Donc on a bient $u_n < 1$.

Exercice 13

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$v_{n+1} = u_{n+1}^2 = u_n^2 + 3 = v_n + 3$

donc (v_n) est arithmétique de raison 3 et de premier terme $v_0 = 1$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = v_0 + nr = \boxed{1 + 3n}$

De plus, par définition, $u_n \geq 0$ pour $n \geq 1$ donc $u_n = \sqrt{v_n} = \sqrt{1+3n}$

3) $u_n \geq 50 \Leftrightarrow \sqrt{1+3n} \geq 50 \Leftrightarrow 1 + 3n \geq 50 \Leftrightarrow n \geq \frac{49}{3}$ et donc on doit prendre $n \geq 17$.

Partie D : Suite géométrique

Exercice 1

$u_1 = u_0 \times q = \boxed{-2}$ $u_2 = u_1 \times q = \boxed{4}$ $u_3 = u_2 \times q = \boxed{-8}$ $u_4 = u_3 \times q = \boxed{16}$ et $u_5 = u_4 \times q = \boxed{-32}$

Exercice 2

1) Le terme général de (u_n) ne s'annule pas donc :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{n+2}}{3^{n+1}} = 3$$

Le résultat ne dépend pas de n donc (u_n) est géométrique de raison 3.

On aurait pu aussi avoir : $u_{n+1} = 3^{n+2} = 3^{n+1} \times 3 = 3u_n$ don …

2) $u_0 = 0$ $u_1 = 1$ et $u_2 = 4$ (u_n) n'est clairement pas géométrique.

3) $u_{n+1} = 2 \times 5^{n+2} = 2 \times 5^{n+1} \times 5 = 5u_n$ donc (u_n) est géométrique de raison 5.

4) Le terme général de (u_n) ne s'annule pas donc :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{-5^{n-1}}{-5^{n-2}} = 5^{n-1-n+2} = 5$$

Le résultat ne dépend pas de n donc (u_n) est géométrique de raison 5.

Exercice 3

1) $p_0 = 8{,}2$ Augmenter de 1% revient à multiplier par $1 + \frac{1}{100}$ soit par 1,01.

On a donc $p_1 = 8{,}2 \times 1{,}01 = 8{,}282$ et $p_2 = 8{,}282 \times 1{,}01 \approx 8{,}365$

2) D'après la question précédente, $p_{n+1} = 1{,}01p_n$ donc (p_n) est géométrique de raison 1,01.

3) Pour $n \in \mathbb{N}$: $p_n = p_0 \times q^n = \boxed{8{,}2 \times 1{,}01^n}$

2025 correspond à $2010 + 15$ donc on calcule p_{15} : $p_{15} = 8{,}2 \times 1{,}01^{15} \approx 9{,}52$

Si la hausse se poursuit dans les mêmes conditions, le prix de l'article sera de 9,52 € en 2025.

Exercice 4

1) Augmenter de 4% revient à multiplier par 1,04 donc on a $\boxed{C_{n+1} = 1{,}04C_n}$

2) (C_n) est donc une suite géométrique de raison 1,04 et on a $C_n = C_0 \times 1{,}04^n = 6500 \times 1{,}04^n$.

Au bout de 5 ans, on a $C_5 = 6500 \times 1{,}04^5 \approx 7908{,}24$

On a donc environ 7908,24€ au bout de 5 ans.

3) Le capital aura augmenté de 50% lorsqu'il sera supérieur à $6500 \times 1{,}5 = 9750$.

A la calculatrice, on a $C_9 \approx 9252$ et $C_{10} \approx 9622$ donc le capital aura augmenté de 50% au bout de 10 ans.

Exercice 5

1) Pour $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 2 \times 3^n$ donc $u_{n+1} - u_n = 2 \times 3^{n+1} - 2 \times 3^n = 2 \times 3^n(3-1) = 4 \times 3^n > 0$

Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

2) Pour $n \in \mathbb{N}$: $u_n = -2 \times 3^n$ donc $u_{n+1} - u_n = -2 \times 3^{n+1} + 2 \times 3^n = 2 \times 3^n(-3+1) = -4 \times 3^n < 0$

Donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

3) Pour $n \in \mathbb{N}$: $u_n = -4 \times 2^n$ donc $u_{n+1} - u_n = -4 \times 2^{n+1} + 4 \times 2^n = 4 \times 2^n(-2+1) = -4 \times 2^n < 0$

Donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

4) Pour $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 12 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ donc

$$u_{n+1} - u_n = 12 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 12 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 12 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(-\frac{1}{2} - 1\right) = -18 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

Le signe de $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ n'est pas toujours le même selon que n est impair ou pair… donc (u_n) n'est ni croissante, ni décroissante.

Exercice 6

$A = 1 + 3 + 9 + \cdots + 3^{20} = u_0 + u_1 + \cdots + u_{20}$ avec (u_n) la suite géométrique de 1[er] terme $u_0 = 1$ et de raison 3.
On a bien $u_{20} = u_0 \times q^{20} = 3^{20}$. Donc

$$A = u_0 \times \frac{1-q^{21}}{1-q} = \frac{1-3^{21}}{1-3} = \frac{3^{21}-1}{2} = \boxed{5\,230\,176\,601}$$

$B = 1 - 2 + 4 + \cdots + 1024 = u_0 + u_1 + \cdots + u_{10}$ avec (u_n) la suite géométrique de 1[er] terme $u_0 = 1$ et de raison $q = -2$. On a bien $u_{10} = u_0 \times q^{10} = (-2)^{10} = 1024$.

$$B = u_0 \times \frac{1-q^{11}}{1-q} = \frac{1-(-2)^{11}}{1-(-2)} = \frac{2049}{3} = \boxed{683}$$

$C = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{10}} = u_0 + u_1 + \cdots + u_{10}$ avec (u_n) la suite géométrique de 1[er] terme $u_0 = 1$ et de raison $q = -\frac{1}{2}$. On a bien $u_{10} = u_0 \times q^{10} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}$.

$$C = u_0 \times \frac{1-q^{11}}{1-q} = \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{11}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1+\frac{1}{2048}}{\frac{3}{2}} = \frac{2049}{2048} \times \frac{2}{3} = \boxed{\frac{683}{1024}}$$

Exercice 7

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{20} = u_1 \times \frac{1-q^{20}}{1-q} = 3 \times \frac{1-1{,}05^{20}}{1-1{,}05} \approx 99{,}2$$

Exercice 8

1) $u_1 = 2u_0 - 5 = -3$; $u_2 = 2u_1 - 5 = -11$

$v_0 = 5 - u_0 = 4$; $v_1 = 5 - u_1 = 8$; $v_2 = 5 - u_2 = 16$

Il semble que (v_n) soit géométrique de raison 2.

2) Montrons donc que $v_{n+1} = 2v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$v_{n+1} = 5 - u_{n+1} = 5 - (2u_n - 5) = 5 - 2u_n + 5 = 10 - 2u_n = 2(5 - u_n) = 2v_n$

Donc (v_n) est bien géométrique de raison 2.

3) Pour $n \in \mathbb{N}$:$v_n = v_0 \times q^n = 4 \times 2^n = \boxed{2^{n+2}}$

De plus, $u_n = 5 - v_n = \boxed{5 - 2^{n+2}}$

4) Pour $n \in \mathbb{N}$:

$u_{n+1} - u_n = 5 - 2^{n+3} - (5 - 2^{n+2}) = -2^{n+3} + 2^{n+2} = 2^{n+2}(1-2) = -2^{n+2} < 0$

Donc (u_n) est décroissante.

Exercice 9

1) $w_2 = w_1 - \frac{1}{4}w_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \times (-1) = \boxed{\frac{3}{4}}$

On remarque que $w_2 - w_1 \neq w_1 - w_0$ donc la suite (w) n'est pas arithmétique et de même $\frac{w_2}{w_1} \neq \frac{w_1}{w_0}$ donc la suite (w_n) n'est pas géométrique.

2)

a. $u_0 = w_1 - \frac{1}{2}w_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times (-1) = \boxed{1}$

b. Pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = w_{n+2} - \frac{1}{2}w_{n+1} = w_{n+1} - \frac{1}{4}w_n - \frac{1}{2}w_{n+1} = \frac{1}{2}w_{n+1} - \frac{1}{4}w_n = \frac{1}{2}\left(w_{n+1} - \frac{1}{2}w_n\right) = \boxed{\frac{1}{2}u_n}$$

c. On en déduit que la suite (u_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 = 1$.

d. Pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \boxed{\frac{1}{2^n}}$

3)

a. $v_0 = \frac{w_0}{u_0} = \frac{-1}{1} = \boxed{-1}$

b. Pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} = \frac{w_{n+1}}{u_{n+1}} = \frac{u_n + \frac{1}{2}w_n}{\frac{1}{2}u_n} = \boxed{2 + \frac{w_n}{u_n}}$$

c. On en déduit que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\boxed{v_{n+1} = v_n + 2}$ et donc (v_n) est arithmétique de raison 2 et de premier terme $v_0 = -1$.

d. La suite (v_n) est donc une suite arithmétique de raison 2 d'où $v_n = v_0 + 2n = \boxed{-1 + 2n}$ pour tout entier naturel n.

4) Pour tout entier naturel n, $w_n = u_n \times v_n$ donc :

$$w_n = \frac{1}{2^n} \times (-1 + 2n) = \boxed{\frac{2n-1}{2^n}}$$

Exercice 10

Pour $n \in \mathbb{N}$

$S_{n+1} = u_{n+2} + u_{n+1} = 7u_{n+1} + 8u_n + u_{n+1} = 8(u_{n+1} + u_n) = 8S_n$

Donc la suite (S_n) est géométrique de raison 8 et de premier terme $S_0 = u_1 + u_0 = 1$.

On a donc $\boxed{u_{n+1} + u_n = 8^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 11

1) (v_n) est géométrique s'il existe un réel k tel que $v_{n+1} = kv_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$v_{n+1} = kv_n \Leftrightarrow u_{n+1} + a = k(u_n + a) \Leftrightarrow 2u_n + 1 + a = ku_n + ka$

Par identification, on peut donc choisir $\begin{cases} k = 2 \\ 1 + a = ka \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ a = 1 \end{cases}$

On trouve donc que $\boxed{v_n = u_n + 1}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et que (v_n) est alors géométrique de raison 2.

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 2^n = \boxed{3 \times 2^n}$

De plus, $u_n = v_n - 1$ donc $\boxed{u_n = 3 \times 2^n - 1}$

3) $v_0 + v_1 + \cdots + v_{10} = v_0 \times \frac{1-2^{11}}{1-2} = -3(1 - 2^{11}) = -3(1 - 2048) = \boxed{6141}$

$u_0 + u_1 + \cdots + u_{10} = v_0 - 1 + v_1 - 1 + \cdots + v_{10} - 1 = (v_0 + v_1 + \cdots + v_{10}) - 11 = 6141 - 11 = \boxed{6130}$

Exercice 12

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$v_{n+1} = u_{n+1} - u_n = 3u_{n-1} - 2u_n - u_n = 3(u_{n-1} - u_n) = -3(u_n - u_{n-1}) = -3v_n$

Donc $\boxed{(v_n) \text{ est géométrique de raison } -3}$ et de premier terme $v_1 = u_2 - u_1 = 1$.

2) On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{v_n = (-3)^{n-1}}$.

3) Par récurrence, nous allons montrer que la propriété $P_n :\ u_{n+1} - u_1 = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation : on veut montrer que P_1 est vraie, c'est-à-dire que $u_2 - u_1 = v_1$ or ceci est évident par définition.

Hérédité : on suppose que pour un entier naturel strictement positif n, P_n est vraie, c'est-à-dire $u_{n+1} - u_1 = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n$. On veut montrer que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire $u_{n+2} - u_1 = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n + v_{n+1}$.

Or $v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n + v_{n+1} = u_{n+1} - u_1 + v_{n+1} = u_{n+1} - u_1 + u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+2} - u_1$

Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel strictement positif n,

$\boxed{u_{n+1} - u_1 = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n}$

4) On a donc pour $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-1} + u_1 = v_1 \times \frac{1-(-3)^{n-1}}{1-(-3)} + 2 = \boxed{\frac{1}{4}[1 - (-3)^{n-1}] + 2}$

<u>Partie E : Bilan</u>

Exercice 1

Partie 1

1) Pour $n = 3$: $u = 1$; $S = 1$ et $i = 0$.

Comme $i < 3$, alors $u = 2 \times 1 + 1 - 0 = 3$; $S = 1 + 3 = 4$ et $i = 0 + 1 = 1$.

Comme $i < 3$, alors $u = 2 \times 3 + 1 - 1 = 6$; $S = 4 + 6 = 10$ et $i = 1 + 1 = 2$.

Comme $i < 3$, alors $u = 2 \times 6 + 1 - 2 = 11$; $S = 10 + 11 = 21$ et $i = 2 + 1 = 3$.
On n'a plus $i < 3$ donc on arrête et on affiche $u = 11$ et $S = 21$.

2)

Valeur de n	0	1	2	3	4	5
Affichage pour u	1	3	6	11	20	37
Affichage pour S	1	4	10	21	41	78

Partie 2

1) Pour un entier naturel n donné, l'algorithme affiche u_n et S_n.

2)

a.

n	0	1	2	3	4	5
u_n	1	3	6	11	20	37
$u_n - n$	1	2	4	8	16	32

b. A priori, on a $u_n - n = 2^n$ ou encore $u_n = 2^n + n$ pour tout entier naturel n.

c. Nous allons montrer par récurrence que $P_n : u_n = n^2 + n$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}$:
Initialisation : on veut montrer que P_n est vraie au rang 0, c'est-à-dire que $u_0 = 2^0 + 0$ or $u_0 = 1$ et $2^0 + 0 = 1$.
Hérédité : on suppose que pour un entier naturel n, P_n est vraie, c'est-à-dire $u_n = 2^n + n$.
On veut montrer que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire $u_{n+1} = 2^{n+1} + n + 1$.
Or $u_{n+1} = 2u_n + 1 - n = 2(2^n + n) + 1 - n = 2^{n+1} + 2n + 1 - n = 2^{n+1} + n + 1$.
Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, on a $\boxed{u_n = 2^n + n}$

3) Le but de cette question est de calculer S_n en fonction de n et d'utiliser un résultat de la première partie pour contrôler l'exactitude de ce calcul.

a. $1 + 2 + \cdots + n$ est la somme des n premiers termes de la suite arithmétique (a_n) de premier terme $a_0 = 1$ et de raison $r = 1$. On a donc $1 + 2 + \cdots + n = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme+dernier terme}}{2} = \boxed{n \times \frac{n+1}{2}}$
$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n$ est la somme des $n + 1$ premiers termes de la suite (b_n) géométrique de premier terme $b_0 = 1$ et de raison 2. On a donc
$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 1 \times \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = \boxed{2^{n+1} - 1}$.

b. $S_n = u_0 + u_1 + \cdots . +u_n = 2^0 + 0 + 2^2 + 1 + 2^2 + 2 + \cdots + 2^n + n$
$= 1 + 2 + \cdots + n + (2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n)$
$= \boxed{\dfrac{n(n+1)}{2} + 2^{n+1} - 1}$

c. Pour $n = 5$:
$\frac{5\times6}{2} + 2^6 - 1 = 15 + 64 - 1 = 78$. On retrouve bien S_5 calculé à la question 2a.

Exercice 2

Soit la suite U de terme général U_n définie par $U_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, par :
$U_{n+1} = U_n + 2(n + 1)$.

1) $U_1 = U_0 + 2 \times 1 = 2$ $\quad U_2 = U_1 + 2 \times 2 = 2 + 4 = 6$ et $U_3 = U_2 + 2 \times 3 = 6 + 6 = 12$.

2) Proposition 1 : $U_1 - U_0 = 6 - 2 = 4$ et $U_2 - U_1 = 12 - 6 = 6$ donc la suite U n'est pas géométrique.
Proposition 2 : Pour $n = 1$, on a $U_1 = 2$ et $1^2 + 1 = 2$ donc on a bien $U_n = n^2 + 1$ pour $n = 1$.
Proposition 3 : Pour $n = 2$, on a $U_2 = 6$ et $2^2 + 1 = 5$ donc $U_2 \neq 2^2 + 1$ donc la formule est fausse dans le cas général.

3)

a. Au début $N = 3$ et $P = 0$. K va prendre des valeurs de 0 à 3.
Pour $K = 0 : P = 0 + 0 = 0$ et on affiche 0.
Pour $K = 1 : P = 0 + 1 = 1$ et on affiche 1.
Pour $K = 2 : P = 1 + 2 = 3$ et on affiche 3.
Pour $K = 3 : P = 3 + 3 = 6$ et on affiche 6.
On a obtenu : 0 ; 1 ; 3 ; 6 ce qui ne correspond pas aux quatre premiers termes de U.

b. On remplace « Affecter à P la valeur P + K » par « Affecter à P la valeur P + 2K »
On aura alors, si on fait fonctionner l'algorithme :
Au début $N = 3$ et $P = 0$. K va prendre des valeurs de 0 à 3.
Pour $K = 0 : P = 0 + 2 \times 0 = 0$ et on affiche 0.

Pour $K=1$: $P=0+2\times 1=2$ et on affiche 2.
Pour $K=2$: $P=2+2\times 2=6$ et on affiche 6.
Pour $K=3$: $P=6+2\times 3=12$ et on affiche 12.
L'affichage 0 ; 2 ; 6 ; 12 correspond bien aux premiers termes de la suite U.

4) Pour tout entier naturel k,

$(k^2+k)+2(k+1)=k^2+k+2k+2=k^2+3k+2$ et aussi
$(k+1)^2+k+1=k^2+2k+1+k+1=k^2+3k+2$
Donc on a bien $(k^2+k)+2(k+1)=(k+1)^2+k+1$.

5) Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, P_n : $U_n=n^2+n$ est vraie.

Initialisation : on veut montrer que P_n est vraie au rang 0, c'est-à-dire que $U_0=0^2+0$ or $U_0=0$ donc c'est vraie.
Hérédité : on suppose que pour un entier naturel n, P_n est vraie, c'est-à-dire $U_n=n^2+n$
On veut montrer que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire $U_{n+1}=(n+1)^2+n+1$.
Or $U_{n+1}=U_n+2(n+1)=n^2+n+2(n+1)=(n+1)^2+n+1$ d'après la question précédente
Donc $U_{n+1}=(n+1)^2+n+1$.
Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, $\boxed{U_n=n^2+n}$

Exercice 3

1) $u_1=16=4^2$; $u_2=1156=34^2$; $u_3=111556=334^2$; $u_4=3334^2$ et $u_5=33334^2$
2) $S=10+10^2+\cdots+10^{n-1}$ est la somme des $(n-1)$ premiers termes de la suite (v_n) géométrique de 1er terme $v_1=10$ et de raison $q=10$. On a bien $v_{n-1}=v_1\times q^{n-1-1}=10\times 10^{n-2}=10^{n-1}$

On a donc

$$S_n=v_1\times\frac{1-q^{n-1}}{1-q}=10\times\frac{1-10^{n-1}}{1-10}=\boxed{\frac{10}{9}(10^{n-1}-1)}$$

3) $T_n=v_n+v_{n+1}+\cdots+v_{2n-1}=v_n\times\frac{1-q^n}{1-q}=10^n\times\frac{1-10^n}{1-10}=\boxed{\frac{10^n}{9}(10^n-1)}$
4) u_n s'écrit avec n fois le chiffre 1 suivi de $(n-1)$ fois le chiffre 5 et enfin une fois le chiffre 6.

Il y a donc au total $2n$ chiffres.
Nous avons donc $u_n=\underbrace{10^{2n-1}+10^{2n-2}+\cdots+10^n}_{n\text{ fois le chiffre 1}}+\underbrace{(10^{n-1}+\cdots+10^2+10)\times 5}_{n-1\text{ fois le chiffre 5}}+6=T_n+5S_n+6$

5) Pour $n\geq 2$:

$$u_n=T_n+5S_n+6=\frac{10^n}{9}(10^n-1)+5\times\frac{10}{9}(10^{n-1}-1)+6$$

$$=\frac{10^{2n}-10^n}{9}+\frac{5\times 10^n-50}{9}+\frac{54}{9}=\frac{10^{2n}+4\times 10^n+4}{9}=\frac{(10^n+2)^2}{3^2}=\boxed{\left(\frac{10^n+2}{3}\right)^2}$$

6) Pour $n\geq 2$, 10^n+2 s'écrit avec une fois le chiffre 1, des 0 puis une fois le chiffre 2. La somme des chiffres est donc égale à 3 ce qui montre que 10^n+2 est divisible par 3 et donc $\frac{10^n+2}{3}$ est un enter.

u_n est donc toujours un carré d'entier.

Exercice 4

On note u_n l'aire du n-ième secteur. On a $u_1=\frac{1}{2}\pi R^2=\frac{1}{2}\pi$; $u_2=\frac{1}{2}\times u_1=\frac{1}{4}\pi$.
Par construction, $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n$ donc (u_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de 1er terme $u_1=\frac{1}{2}\pi$.
La portion du disque représentée par le n-ième secteur est donc $\frac{u_n}{\pi R}=(u_1\times q^{n-1})\times\frac{1}{\pi}=\frac{1}{2}\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\times\frac{1}{\pi}=\boxed{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$
L'aire des n premiers secteurs est égale à

$$u_1+u_2+\cdots+u_n=\frac{u_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{1}{2}\pi\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\pi\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]\times 2=\pi\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

La portion du disque représentée par les n premiers secteurs est donc

$$\frac{\pi\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{\pi}=\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

$$1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\geq 0{,}9\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^n\leq 0{,}1$$

A la calculatrice, $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0{,}125$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^4 \approx 0{,}06$ donc il faut au moins 4 secteurs pour couvrir 90% du disque.

$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq 0{,}95 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 0{,}05$

A la calculatrice, $\left(\frac{1}{2}\right)^4 \approx 0{,}06$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^5 \approx 0{,}03$ donc il faut au moins 5 secteurs pour couvrir 95% du disque.

$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq 0{,}99 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 0{,}01$

A la calculatrice, $\left(\frac{1}{2}\right)^6 \approx 0{,}0156$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^7 \approx 0{,}0008$ donc il faut au moins 7 secteurs pour couvrir 99% du disque.

L'aire des secteurs va devenir de plus en plus petite et se rapprocher de 0.

Quant à l'aire des n premiers secteurs va se rapprocher de l'aire du disque et le rapport se rapprocher de 1.

Exercice 5

1) La plus grosse boule a pour diamètre $n+1$ donc le volume est :

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \boxed{\frac{4}{3}\pi(n+1)^3}$$

2)

a. Volume de la sphère de rayon k : $\frac{4}{3}\pi k^3$

Volume de la sphère de rayon $(k+1)$: $\frac{4}{3}\pi(k+1)^3$ donc

$$V_k = \frac{4}{3}\pi(k+1)^3 - \frac{4}{3}\pi k^3 = \frac{4}{3}\pi[(k+1)^3 - k^3] = \frac{4}{3}\pi[k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k^3] = \boxed{\frac{4}{3}\pi(3k^2 + 3k + 1)}$$

b. La grosse boule est obtenue en ajoutant tous les volumes délimités par les sphères de rayons k et $k+1$ ainsi que le volume de la 1ère sphère de rayon 1. On a donc :

$$\boxed{V = V_1 + V_2 + \cdots + V_n + \frac{4}{3}\pi}$$

c. Nous avons :

$$\frac{4}{3}\pi(n+1)^3 = \frac{4}{3}\pi(3 \times 1^2 + 3 \times 1 + 1) + \frac{4}{3}\pi(3 \times 2^2 + 3 \times 2 + 1) + \cdots + \frac{4}{3}\pi(3 \times n^2 + 3n + 1) + \frac{4}{3}\pi$$

En simplifiant par $\frac{4}{3}\pi$, on a

$$(n+1)^3 = 3(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) + 3(1 + 2 + \cdots + n) + (1 + 1 + \cdots + 1) + 1$$

$$\boxed{(n+1)^3 = 3(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) + 3(1 + 2 + \cdots + n) + n + 1}$$

d.

$$(n+1)^3 = 3(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) + 3(1 + 2 + \cdots + n) + n + 1$$

$$\Leftrightarrow n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = 3(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) + 3(1 + 2 + \cdots + n) + n + 1$$

$$\Leftrightarrow 3(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 3(1 + 2 + \cdots + n) - n - 1$$

$$\Leftrightarrow 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{3}\left[n^3 + 3n^2 + 3n - \frac{3\big(n(n+1)\big)}{2} - n\right]$$

$$\Leftrightarrow 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{3} \times \frac{2n^3 + 6n^2 + 6n - 3(n^2 + n) - 2n}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

Or $n(n+1)(2n+1) = (n^2 + n)(2n+1) = 2n^3 + n^2 + 2n^2 + n = 2n^3 + 3n^2 + n$ donc

$$\boxed{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

Exercice 6

1) $u_1 = \frac{1}{1^2} = \boxed{1}$ $u_2 = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} = 1 + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{5}{4}}$ $u_3 = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{36+9+4}{36} = \boxed{\frac{49}{36}}$

$$u_4 = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} = \frac{144 + 36 + 16 + 9}{144} = \boxed{\frac{205}{144}}$$

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2}$ donc $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$

Donc (u_n) est strictement croissante.

3) Pour $k \geq 2$:

$$\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}-\frac{1}{k^2}=\frac{k^2-(k-1)k-(k-1)}{(k-1)k^2}=\frac{k^2-k^2+k-k+1}{(k-1)k^2}=\frac{1}{(k-1)k^2}>0$$

Donc, on a bien $\boxed{\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}}$ pour tout $k \geq 2$.

4) On a

$$\frac{1}{2^2}<\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{3^2}<\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{4^2}<\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$$
…
$$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$$

En additionnant terme à terme :

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2}<1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$$

$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2}<1-\frac{1}{n}$ et donc

$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}$ en ajoutant 1 des deux côtés. On a bien $\boxed{u_n<2-\frac{1}{n}}$

5) $2-\frac{1}{n}<2$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ donc $u_n<2$ et on ne peut pas avoir que la limite de (u_n) est $+\infty$ car il le dépassera pas le seuil 2.

6) $\frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}644$

7) On peut répondre à la question à l'aide de l'algorithme ci-contre.

```
VARIABLES
  u EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  u PREND_LA_VALEUR 1
  n PREND_LA_VALEUR 1
  TANT_QUE (u<1.64) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    n PREND_LA_VALEUR n+1
    u PREND_LA_VALEUR u+1/(n*n)
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER n
FIN_ALGORITHME
```

On obtient : $n=203$

$u_{202} \approx 1{,}639996$ et $u_{203} \approx 1{,}64002$

Exercice 7

1) La population des citadins évolue de la manière suivante : 90% restent citadins et il arrive 20% de la population rurale. On a donc $V_{n+1}=0{,}9V_n+0{,}2Ru_n$.

De même, 80% de la population rurale le reste et il arrive 10% des citadins donc $R_{n+1}=0{,}8R_n+0{,}1V_n$.

2)

a. S_n est la somme de la population rurale et citadine. Or d'après l'énoncé, cette population totale reste stable. On aura donc toujours $S_n=60$.

b. Par le calcul :

$$S_{n+1}=V_{n+1}+R_{n+1}=0{,}9V_n+0{,}2R_n+0{,}1V_n+0{,}8R_n=V_n+R_n=S_n$$

On retrouve donc que (S_n) est constante.

c. Nous avons donc $V_n+R_n=60$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $V_n=60-R_n$ et $R_n=60-V_n$.

$$\begin{cases}V_{n+1}=0{,}9V_n+0{,}2R_n\\R_{n+1}=0{,}1V_n+0{,}8R_n\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}V_{n+1}=0{,}9V_n+0{,}2(60-V_n)\\R_{n+1}=0{,}1(60-R_n)+0{,}8R_n\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}V_{n+1}=0{,}7V_n+12\\R_{n+1}=0{,}7R_n+6\end{cases}$$

3)

a. Pour $n \in \mathbb{N}$

$$W_{n+1}=V_{n+1}-40=0{,}7V_n+12-40=0{,}7V_n-28=0{,}7(W_n+40)-28=0{,}7W_n+28-28=0{,}7W_n$$

Donc (W_n) est géométrique de raison 0,7 et de 1^er^ terme $W_0=-20$.

On a donc $W_n=W_0\times q^n=\boxed{-20\times 0{,}7^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $V_n=W_n+40=\boxed{40-20\times 0{,}7^n}$

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $R_n=60-V_n=60-(40-20\times 0{,}7^n)=\boxed{20+20\times 0{,}7^n}$

d. Pour $n \in \mathbb{N}$

$$V_{n+1}-V_n=40-20\times 0{,}7^{n+1}-40+20\times 0{,}7^n=20\times 0{,}7^n(-0{,}7+1)=6\times 0{,}7^n>0$$

Donc la population de la ville augmente.

$$R_{n+1}-R_n=20+20\times 0{,}7^{n+1}-20-20\times 0{,}7^n=20\times 0{,}7^n(0{,}7-1)=-3\times 0{,}7^n<0$$

Donc la suite (R_n) est décroissante et la population rurale diminue.

e. $V_n \geq R_n \Leftrightarrow 40 - 20 \times 0{,}7^n \geq 20 + 20 \times 0{,}7^n \Leftrightarrow 40 \times 0{,}7^n \leq 20 \Leftrightarrow 0{,}7^n \leq \frac{1}{2}$

A l'aide de la calculatrice, $0{,}7^1 = 0{,}7$ et $0{,}7^2 = 0{,}49$ donc au bout de deux ans, la population en ville devient supérieure à la population rurale et comme (V_n) est croissante et (R_n) décroissante, cela restera ainsi.

$V_n \geq 39 \Leftrightarrow 40 - 20 \times 0{,}7^n \geq 39 \Leftrightarrow -20 \times 0{,}7^n \geq -1 \Leftrightarrow 0{,}7^n \leq \dfrac{1}{20}$

A la calculatrice, $0{,}7^8 \approx 0{,}0576$ et $0{,}7^9 \approx 0{,}04$ donc au bout de 9 ans la population citadine va dépasser 39 millions.

$R_n \leq 22 \Leftrightarrow 20 + 20 \times 0{,}7^n \leq 22 \Leftrightarrow 20 \times 0{,}7^n \leq 2 \Leftrightarrow 0{,}7^n \leq 0{,}1$

A la calculatrice, $0{,}7^6 \approx 0{,}1176$ et $0{,}7^7 \approx 0{,}08$ donc au bout de 7 ans la population rurale passera en dessous de la barre des 22 millions.