Correction devoir maison n°13

Exercice 1

1) On considère la fonction $f: x \mapsto x^2$.
   a. f est décroissante sur $]-\infty; 0]$ donc sur $]-5; -2]$ donc $f(-5) > f(x) \geq f(-2)$ d'où $\boxed{25 > x^2 \geq 4}$
   b. f est décroissante sur $]-4; 0]$ donc si $-4 < x \leq 0$ alors $16 > x^2 \geq 0$.
   f est croissante sur $[0; 2]$ donc si $0 \leq x \leq 2$ alors $0 \leq x^2 \leq 4$.
   Finalement : $\boxed{0 \leq x^2 < 16}$
2)
   a. $x^2 \geq 25 \Leftrightarrow x^2 - 25 \geq 0 \Leftrightarrow (x-5)(x+5) \geq 0$
   On réalise ensuite un tableau de signes :

x	$-\infty$		-5		5		$+\infty$
Signe de $x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $(x-5)(x+5)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $\boxed{S =]-\infty; -5] \cap [5; +\infty[}$

   b. $x^2 < 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) < 0$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $(x-1)(x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $\boxed{S =]-1; 1[}$

Exercice 2

1) Pour $x \in \mathbb{R}$:

$2(x+1)^2 - 18 = 2(x^2 + 2x + 1) - 18 = 2x^2 + 4x + 2 - 18 = 2x^2 + 4x - 16 = f(x)$

2) $x_1 \leq -1$; $x_2 \leq -1$ et $x_1 < x_2$
   a. $f(x_1) - f(x_2) = 2x_1^2 + 4x_1 - 16 - (2x_2^2 + 4x_2 - 16) = 2x_1^2 + 4x_1 - 16 - 2x_2^2 - 4x_2 + 16$

$= 2(x_1^2 - x_2^2) + 4(x_1 - x_2) = 2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + 2 \times 2(x_1 - x_2) = \boxed{2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 2)}$

   b. Par hypothèse : $x_1 \leq -1$ et $x_2 \leq -1$ donc $x_1 + x_2 \leq -2$ et donc $x_1 + x_2 + 2 \leq 0$ ce qui montre que $\boxed{x_1 + x_2 + 2 \text{ est négatif.}}$

De plus $x_1 < x_2$ donc $x_1 - x_2 < 0$ et donc $x_1 - x_2$ est négatif.

Le produit de ces deux expressions est donc positif et donc $\boxed{f(x_1) - f(x_2) \text{ est positif}}$.

   c. Nous avons donc supposé que $x_1 < x_2$ et nous avons montré que $f(x_1) - f(x_2) > 0$ ou encore que $f(x_1) > f(x_2)$. L'ordre est donc inversé par la fonction f. Ceci montre qu'$\boxed{\text{elle est décroissante sur }]-\infty; -1]}$.

3) $(x+1)^2 \geq 0$ car un carré est toujours positif.
   $2(x+1)^2 \geq 0$
   $2(x+1)^2 - 18 \geq -18$
   $f(x) \geq -18$
   Donc f est minorée par -18. Or $f(-1) = 2(-1+1)^2 - 18 = -18$
   Donc -18 est bien atteint et donc $\boxed{f \text{ admet } -18 \text{ comme minimum}}$ et ce minimum est atteint en -1.
4) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x+1)^2 - 18 = 0 \Leftrightarrow 2(x+1)^2 = 18 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 9 \Leftrightarrow (x+1)^2 - 9 = 0$

$\Leftrightarrow (x+1+3)(x+1-3) = 0 \Leftrightarrow x + 4 = 0$ ou $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -4$ ou $x = 2$

$\boxed{\text{0 a donc deux antécédents : } -4 \text{ et } 2.}$