Devoir Commun de Mathématiques - Classes de seconde - Lycée Saint-Exupéry
Vendredi 5 février 2010 -- Durée : 1 h 45 -- Sujet A

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la présentation.
Les calculatrices graphiques et programmables sont autorisées.

Attention le sujet doit être rendu avec la copie, merci d'écrire votre nom en page 4.

Exercice 1 : QCM – 4 points

Soit f la fonction définie sur [-3 ; 4] par : $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + \frac{7}{2}$ dont la représentation graphique est notée C_f. A l'aide de la calculatrice, entourer la bonne réponse parmi les quatre propositions a), b), c), d).

Attention, une seule réponse est juste par question.
Toute bonne réponse fait gagner un point, toute réponse fausse en fait perdre 0,25 et l'absence de réponse ne change pas le score.

1) Les valeurs de $f(x)$ calculées sur son ensemble de définition avec un pas de 0,5 sont les suivantes :

a)

-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4

b)

-19	1,5	7	3,5	-3	-6,5	-1	19,5

c)

-19	-6,5	1,5	5,75	7	6	3,5	0,25	-3	-5,5	-6,5	-5,25	-1	7	19,5

d)

3,5	0,25	-3	-5,5	-6,5	-5,25	-1

2) L'équation $f(x) = -3$ vérifie l'affirmation :

- **a)** $f(x) = -3$ admet 1 pour unique solution.
- **b)** L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = -3$ est $S = \emptyset$
- **c)** L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = -3$ est $S = \{-2,1 ; 0,6 ; 3,1\}$
- **d)** Un encadrement d'une des solutions de $f(x) = -3$ notée α à 10^{-1} près est : $-2,4 \leqslant \alpha \leqslant -2,3$

3) L'inéquation $f(x) \geqslant -6,5$ a pour ensemble de solutions :

- **a)** $S =]-2,5 ; 2[\cup]2 ; 4[$
- **b)** $S = [-2,5 ; 4]$
- **c)** $S = [-6,5 ; 19,5]$
- **d)** $S = [-3 ; -2,5]$

4) On trace, dans le même repère que C_f, la représentation graphique C_g de la fonction g définie sur [-3 ; 4] par : $g(x) = x + 3,5$. L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > g(x)$ est :

- **a)** $S =]-19 ; 1,5[\cup]3,5 ; 7]$
- **b)** $S =]-2 ; 0[\cup]3,5 ; 4[$
- **c)** $S =]-2 ; 0[\cup]3,5 ; 4]$
- **d)** $S =]-3 ; -2[\cup]0 ; 3,5[$

Exercice 2 – 5 points

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$. *forme A de* $f(x)$

1) Montrer que pour tout réel x, on a : $f(x) = (x+2)(x^2+1)$. *forme B de* $f(x)$

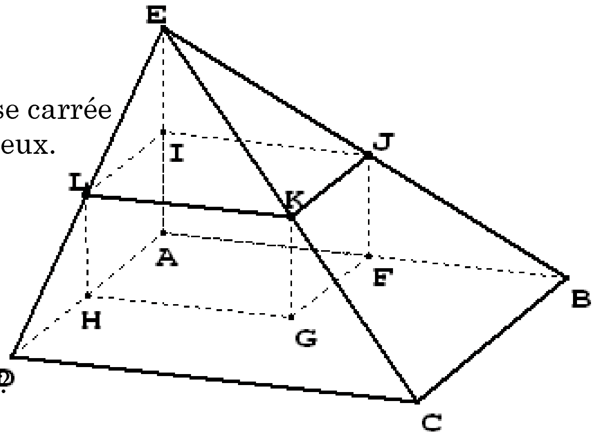
2) En utilisant la forme la mieux adaptée de $f(x)$,

- **a)** déterminer l'image de -1 par f ;
- **b)** résoudre l'équation $f(x) = 0$;
- **c)** déterminer, s'il(s) existe(nt), le(s) antécédent(s) de 2 par f.

Exercice 3 - 3 points

Résoudre l'équation: $\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{1}{x^2-1}=-\dfrac{1}{x-1}$.

Exercice 4 - 6 points



Dans un grenier, on souhaite aménager un local pour entreposer du matériel. L'espace disponible a la forme d'une pyramide à base carrée dont les arêtes [AB], [AD] et [AE] sont perpendiculaires deux à deux.
On donne AB = AD = 9m et AE = 3m.

1) Calculer le volume du grenier.

2) Le local aura la forme d'un pavé droit à base carrée de côté AF = x mètres et de hauteur AI = h mètres .

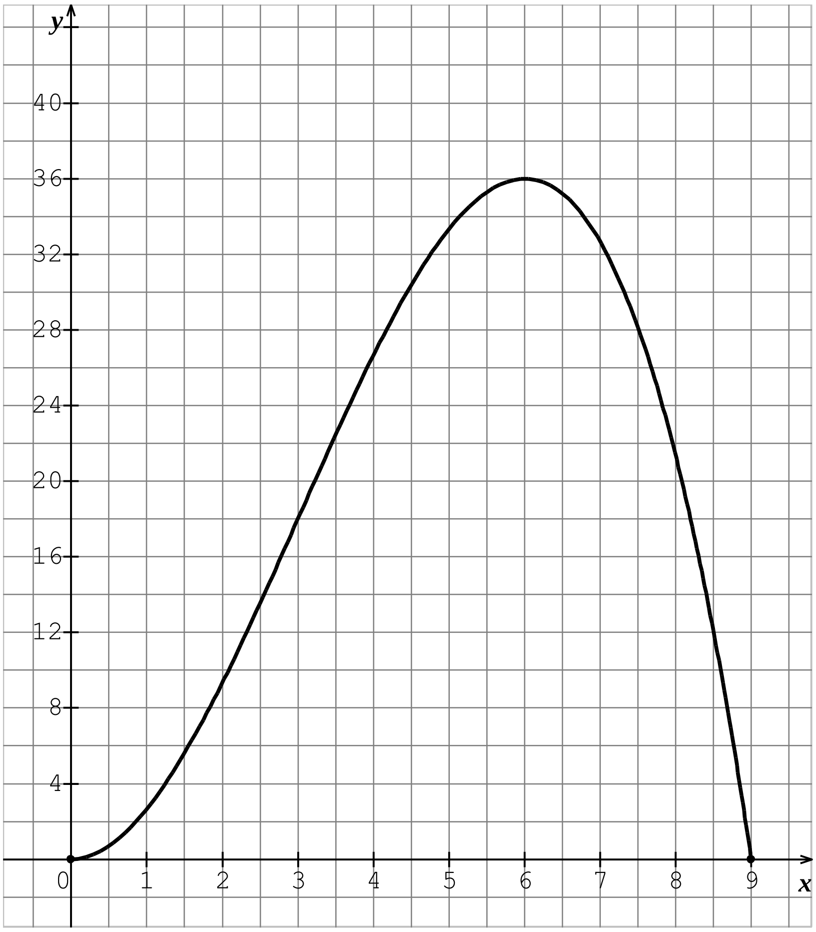
a) Dans quel intervalle x peut-il prendre ses valeurs ?

b) Montrer que $h=\dfrac{1}{3}(9-x)$.

c) Pour $x=6$, calculer la hauteur du local et son volume.

d) Démontrer que le volume du local en fonction de x est $V(x)=\dfrac{1}{3}x^2(9-x)$.

3) Voici ci-dessous la courbe représentative de V pour $x \in [0\ ;9]$.
Lire graphiquement pour quelles valeurs de x le local a un volume de 20 m^3.



4) a) Conjecturer graphiquement pour quelle valeur de x le volume du local est maximal.
Préciser ce volume maximal.
b) Quelles sont alors les dimensions du local ? Qu'en pensez-vous ?

Exercice 5 : Contrôle de fabrication – 6 points

Une machine fabrique des fers cylindriques pour le béton armé de diamètre théorique 25 mm.
On contrôle le fonctionnement de la machine en prélevant un échantillon de 100 pièces au hasard dans la fabrication. Les mesures des diamètres ont permis d'obtenir la courbe des effectifs cumulés croissants donnée en annexe (page 4). Les coordonnées des points sont indiquées sur le graphique.

1) A l'aide de la courbe (donnée en page 4), complétez le tableau ci-dessous :

Diamètre (en mm)	[24 ;24,2[	[24,2 ;24,4[	[24,4 ;24,6[	[24,6 ;24,8[	[24,8 ;25[	[25 ;25,2[	[25,2 ;25,4[	[25,4 ;25,6[	[25,6 ;25,8[	[25,8 ;26[
Effectif cumulé croissant										
Effectif										

2) Calculez la moyenne $\bar{x}$ de cette série en arrondissant à 10^{-2}.

3) Déterminez <u>graphiquement</u> la médiane Me et les quartiles Q_1 et Q_3 de cette série, en expliquant votre démarche.

4) On estime que la machine a un fonctionnement “ normal ” si elle valide les 3 contrôles suivants :
- *Contrôle* 1 : L'étendue de la série reste inférieure à 10% de la moyenne.
- *Contrôle* 2 : L'écart entre la moyenne et la médiane est inférieur à 0,2.
- *Contrôle* 3 : 95% au moins des mesures sont dans l'intervalle $\left[\bar{x}-0{,}8;\bar{x}+0{,}8\right]$.

Parmi ces contrôles, lesquels sont vérifiés ? Cette machine a-t-elle un fonctionnement normal ?

Exercice 6 – 6 points

ABCD est un parallélogramme. M, N, P et Q sont les points tels que:
$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$.

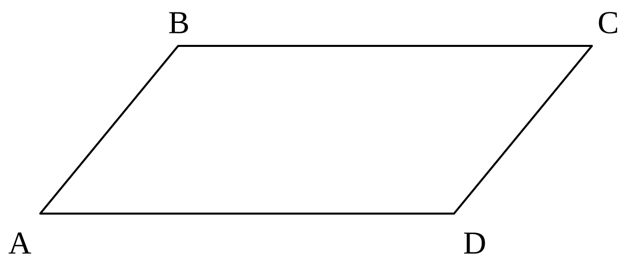
1) Construire les points M, N, P et Q sur la figure ci-dessous.

2) Montrer que $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$.

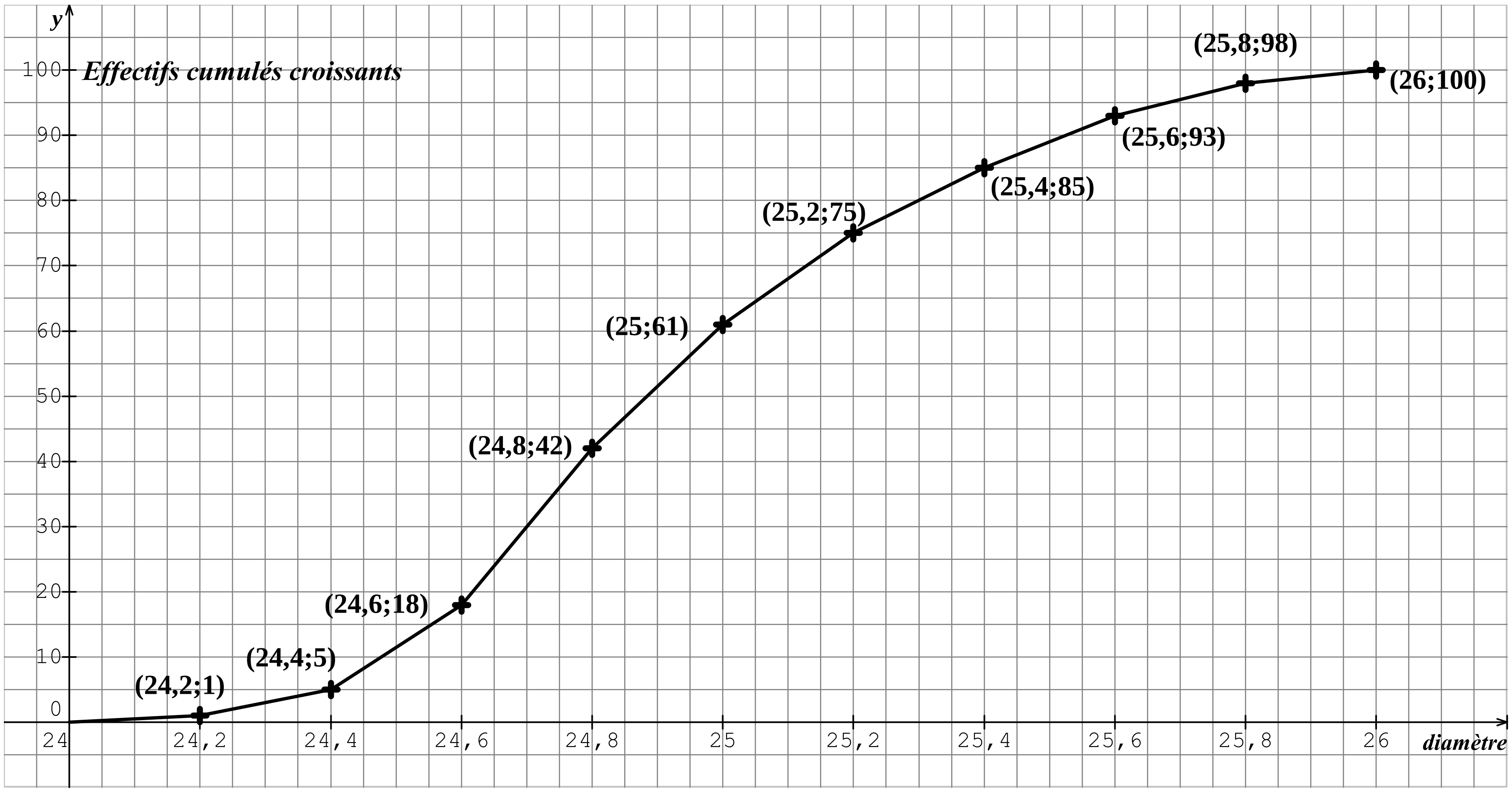
3) Que peut-on en déduire pour le quadrilatère AQBD ? Justifier.

4) <u>Question ouverte</u> : Démontrer que les segments [BP] et [MN] se coupent en leur milieu.

Toute tentative valide de réponse sera valorisée.



ANNEXE (Exercice 5)



Nom, Prénom, Classe :

Devoir Commun de Mathématiques - Classes de seconde - Lycée Saint-Exupéry
Vendredi 5 février 2010 -- Durée : 1 h 45 -- Sujet B

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la présentation.
Les calculatrices graphiques et programmables sont autorisées.

Attention le sujet doit être rendu avec la copie, merci d'écrire votre nom en page 4.

Exercice 1 : QCM – 4 points

Soit f la fonction définie sur [-1 ; 6] par : $f(x) = x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 12x - \frac{3}{2}$ dont la représentation graphique est notée C_f. A l'aide de la calculatrice, entourer la bonne réponse parmi les quatre propositions a), b), c), d).

Attention, une seule réponse est juste par question.
Toute bonne réponse fait gagner un point, toute réponse fausse en fait perdre 0,25 *et l'absence de réponse ne change pas le score.*

1) Les valeurs de $f(x)$ calculées sur son ensemble de définition avec un pas de 0,5 sont les suivantes :

a)

-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6

b)

-22	-1,5	4	0,5	-6	-9,5	-4	16,5

c)

-22	-9,5	-1,5	2,75	4	3	0,5	-2,75	-6	-8,5	-9,5	-8,25	-4	4	16,5

d)

-1,5	4	0,5	-6	-9,5	-4	16,5

2) L'équation $f(x) = -6$ vérifie l'affirmation :

a) $f(x) = -6$ admet 3 pour unique solution.
b) Un encadrement d'une des solutions de $f(x) = -6$ notée α à 10^{-1} près est : $-0,4 \leqslant \alpha \leqslant -0,3$
c) L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = -6$ est $S = \{0,1 ; 2,1 ; 5,3\}$
d) L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = -6$ est $S = \emptyset$

3) L'inéquation $f(x) > -9,5$ a pour ensemble de solutions :

a) $S =]-0,5 ; 4[\cup]4 ; 6]$
b) $S = [-0,5 ; 6]$
c) $S =]-9,5 ; 16,5[$
d) $S = [-1 ; -0,5[$

4) On trace, dans le même repère que C_f, la représentation graphique C_g de la fonction g définie sur [-1 ; 6] par : $g(x) = x - 1,5$. L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < g(x)$ est :

a) $S = [-22 ; -1,5[\cup]0,5 ; 4[$
b) $S = [-1 ; 0[\cup]2 ; 5,5[$
c) $S =]-1 ; 0[\cup]2 ; 5,5]$
d) $S =]0 ; 2[\cup]5,5 ; 6]$

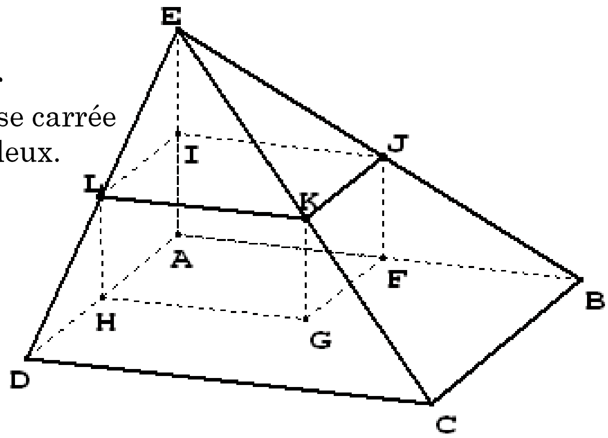
Exercice 2 – 5 points

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$. *forme A de* $f(x)$
1) Montrer que pour tout réel x, on a : $f(x) = (x-2)(x^2+1)$. *forme B de* $f(x)$
2) En utilisant la forme la mieux adaptée de $f(x)$,
a) déterminer l'image de -1 par f ;
b) résoudre l'équation $f(x) = 0$;
c) déterminer, s'il(s) existe(nt), le(s) antécédent(s) de -2 par f.

Exercice 3 - 3 points

Résoudre l'équation: $-\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{1}{x^2-1}=\dfrac{1}{x-1}$.

Exercice 4 - 6 points



Dans un grenier, on souhaite aménager un local pour entreposer du matériel. L'espace disponible a la forme d'une pyramide à base carrée dont les arêtes [AB], [AD] et [AE] sont perpendiculaires deux à deux.
On donne AB = AD = 12m et AE = 3m.

1) Calculer le volume du grenier.

2) Le local aura la forme d'un pavé droit à base carrée de côté AF = x mètres et de hauteur AI = h mètres .

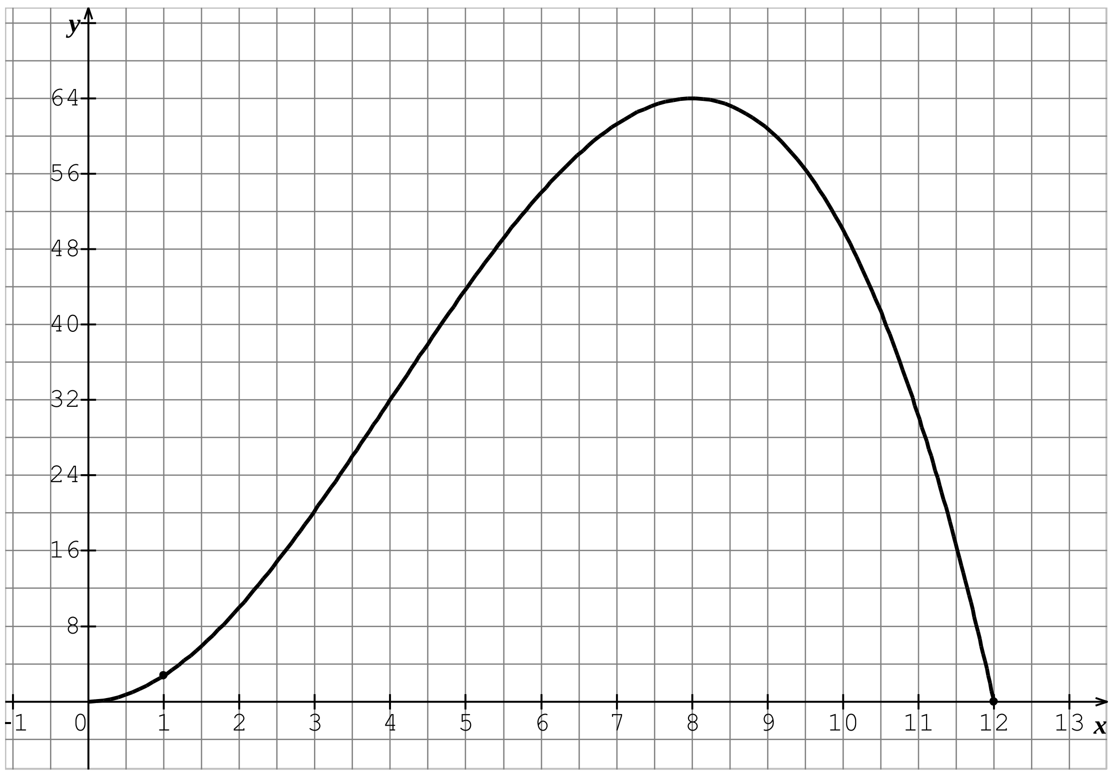
a) Dans quel intervalle x peut-il prendre ses valeurs ?

b) Montrer que $h=\frac{1}{4}(12-x)$

c) Pour $x=8$, calculer la hauteur du local et son volume.

d) Démontrer que le volume du local en fonction de x est $V(x)=\frac{1}{4}x^2(12-x)$.

3) Voici ci-dessous la courbe représentative de V pour $x \in [0 ; 12]$.
Lire graphiquement pour quelles valeurs de x le local a un volume de 32 m^3.



4) **a)** Conjecturer graphiquement pour quelle valeur de x le volume du local est maximal.
Préciser ce volume maximal.

b) Quelles sont alors les dimensions du local ? Qu'en pensez-vous ?

Exercice 5 : Contrôle de fabrication – 6 points

Une machine fabrique des fers cylindriques pour le béton armé de diamètre théorique 25 mm.
On contrôle le fonctionnement de la machine en prélevant un échantillon de 100 pièces au hasard dans la fabrication. Les mesures des diamètres ont permis d'obtenir la courbe des effectifs cumulés croissants donnée en annexe (page 4). Les coordonnées des points sont indiquées sur le graphique.

1) A l'aide de la courbe (donnée en page 4), complétez le tableau ci-dessous :

Diamètre (en mm)	[24 ;24,2[	[24,2 ;24,4[	[24,4 ;24,6[	[24,6 ;24,8[	[24,8 ;25[	[25 ;25,2[	[25,2 ;25,4[	[25,4 ;25,6[	[25,6 ;25,8[	[25,8 ;26[
Effectif cumulé croissant										
Effectif										

2) Calculez la moyenne $\bar{x}$ de cette série en arrondissant à 10^{-2}.

3) Déterminez <u>graphiquement</u> la médiane Me et les quartiles Q_1 et Q_3 de cette série, en expliquant votre démarche.

4) On estime que la machine a un fonctionnement " normal " si elle valide les 3 contrôles suivants :
- *Contrôle* 1 : L'étendue de la série reste inférieure à 10% de la moyenne.
- *Contrôle* 2 : L'écart entre la moyenne et la médiane est inférieur à 0,2.
- *Contrôle* 3 : 95% au moins des mesures sont dans l'intervalle $\left[\bar{x}-0{,}8;\bar{x}+0{,}8\right]$.

Parmi ces contrôles, lesquels sont vérifiés ? Cette machine a-t-elle un fonctionnement normal ?

Exercice 6 – 6 points

ABCD est un parallélogramme. M, N, P et Q sont les points tels que:
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.

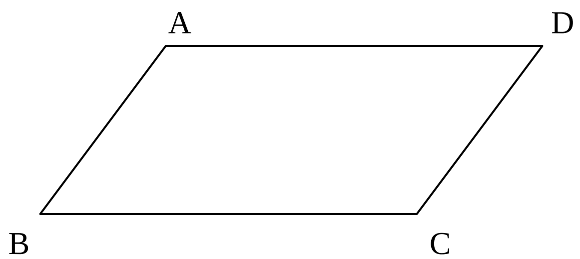
1) Construire les points M, N, P et Q sur la figure ci-dessous.

2) Montrer que $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$.

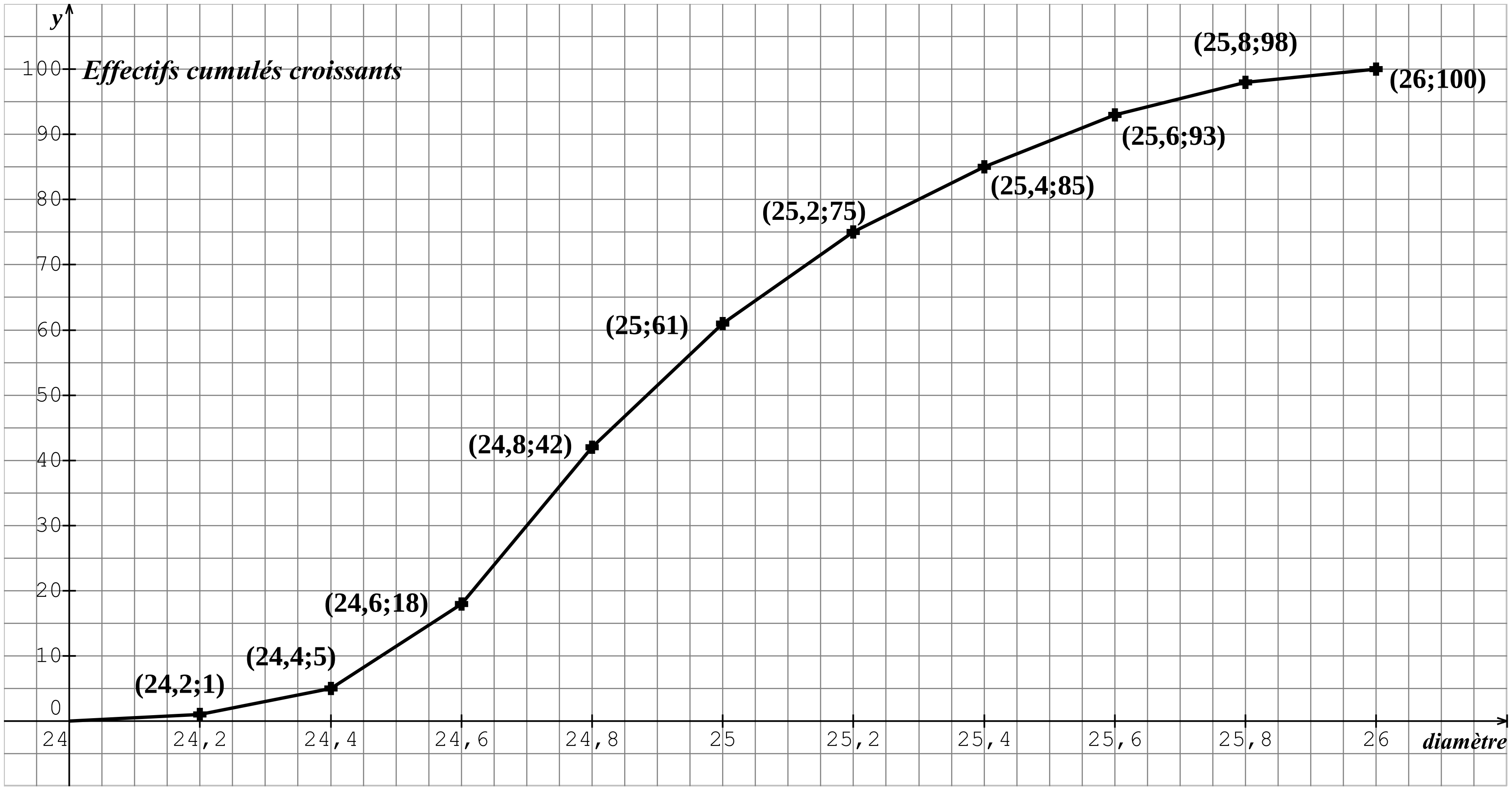
3) Que peut-on en déduire pour le quadrilatère AQBD ? Justifier.

4) <u>Question ouverte</u> : Démontrer que les segments [BP] et [MN] se coupent en leur milieu.

Toute tentative valide de réponse sera valorisée.



ANNEXE (Exercice 5)



Nom, Prénom, Classe :

Proposition de barème sur 30 points :

Exercice 1 : 4 points

Exercice 2 : 5 points

1) 0,5 pourle calcul + 0,5 pour la rédaction
2) 0,5 + 1,5 + 2

Exercice 3 : 3 points

Ensemble de résolution 1 pt

Mise au même dénominateur + résolution : 1,25 pts

Vérification que les solutions ne sont pas de VI : 0,5 pts

Conclusion : 0,25 pts.

Exercice 4 : 6 pts

1) 1 pt
2) 0,25 + 1,5 + 1 + 0,5
3) 0,5
4) 0,5 + 0,75

Exercice 5 : 6 points

1) 1 pt
2) 1 pt
3) 1,5 pts
4) 0,75 (contrôle 1) + 0,5 (contrôle 2) + 1 (contrôle 3) + 0,25 (conclusion)

Exercice 6 : 6 points

1) 0,5 pour M, 0,5 pour N, 1 pour P et 1 pour Q
2) 0,5
3) 1
4) 1,5