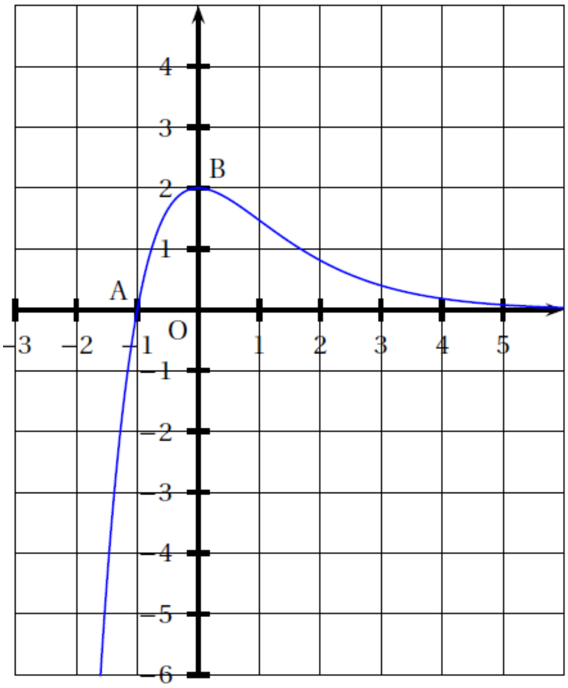
Épreuve de Mathématiques - Durée : 3 heures.

<u>Il sera tenu compte de la qualité de votre rédaction.</u>
<u>L'usage de la calculatrice est autorisé.</u>
Le sujet comporte 4 pages.

Exercice 1 – QCM – Commun à tous les candidats – 4 points



Soit f une fonction définie et dérivable sur Ë.
On a tracé ci-contre sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormal.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur Ë

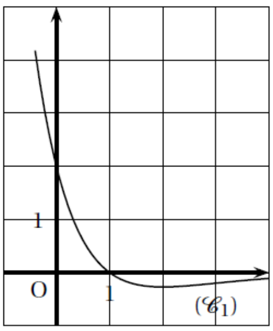
Les points $A(-1\,;0)$ et $B(0\,;2)$ appartiennent à la courbe (C)

La courbe (C) admet en B une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

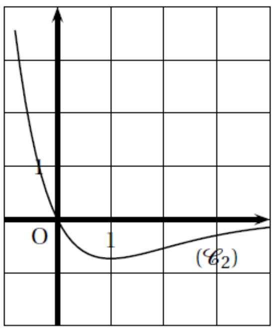
La fonction f est croissante sur]- õ ; 0].
La fonction f est décroissante et strictement positive sur [0 ; + õ [

Pour chaque question, une et une seule des trois propositions est exacte.
Le candidat indique sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse fausse enlève 0,5 points ; l'absence de réponse donne 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

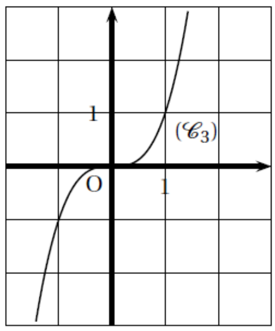
Question 1 : Une des trois courbes ci-dessous représente graphiquement la fonction f'. Déterminer laquelle.



Réponse A

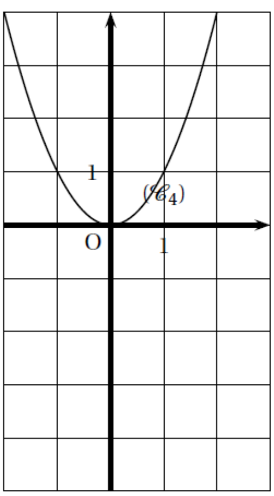


Réponse B

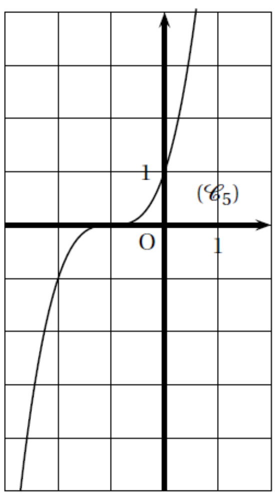


Réponse C

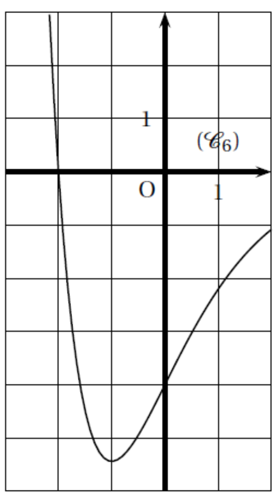
Question 2 : F est une fonction dont la dérivée sur Ë est f, c'est-à-dire $F' = f$.
Une des trois courbes ci-dessous représente graphiquement la fonction F. Déterminer laquelle.



Réponse A



Réponse B



Réponse C

Question 3 : On désigne par ln la fonction logarithme népérien. Soit g la fonction définie par $g(x) = \ln[f(x)]$.
Un des trois intervalles ci-dessous est l'ensemble de définition de la fonction g. Déterminer lequel.

Réponse A : $]0\,;+\infty[$ **Réponse B** : $]-1\,;+\infty[$ **Réponse C** : $[-1\,;+\infty[$

Question 4 : g' est la fonction de la fonction g définie par $g(x) = \ln[f(x)]$.
Déterminer laquelle de ces affirmations est vraie :
Réponse A : $g'(1)\times g'(2) > 0$ **Réponse B** : $g'(1)\times g'(2) = 0$ **Réponse C** : $g'(1)\times g'(2) < 0$

Exercice 2 – Commun à tous les candidats – 6 points.

Le tableau suivant donne l'évolution du chiffre d'affaires du commerce équitable en France, exprimé en millions d'euros.

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Rang de l'année : x_i $1 \leqslant i \leqslant 8$	1	2	3	4	5	6	7	8
Chiffres d'affaires du commerce équitable en millions d'euros : y_i $1 \leqslant i \leqslant 8$	12	21	37	70	120	166	210	256

(Source : M. H. leader du commerce équitable mondial)

1. **a.** En 2007, le commerce de détail en France a généré un chiffre d'affaires de 447 milliards d'euros. (Source : INSEE). En 2007, quelle est la part du chiffre d'affaires du commerce équitable par rapport à celui du commerce de détail ? (On donnera le résultat en pourcentage arrondi à 0,001%)
b. Calculer le pourcentage d'augmentation du chiffre d'affaires du commerce équitable en France entre 2005 et 2008. (on donnera le résultat en pourcentage arrondi à 1%)

Dans la suite de l'exercice, on souhaite estimer en quelle année le chiffre d'affaires du commerce équitable en France dépassera le double de celui de 2007.

2. Ajustement affine.
a. Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\,;y_i)$ ($1 \leqslant i \leqslant 8$) dans un repère orthogonal du plan (on prendra 1 cm pour une année en abscisse et 1 cm pour 20 millions d'euros en ordonnée ; l'origine du repère sera prise dans le coin gauche de la feuille)
b. A l'aide de la calculatrice, déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite D d'ajustement de y en x. Les coefficients seront arrondis au dixième.
Tracer la droite D dans le repère précédent.
c. En utilisant cet ajustement affine, à partir de quelle année peut-on prévoir que le chiffre d'affaires du commerce équitable en France dépassera le double de celui de 2007 ?

3. Ajustement parabolique.

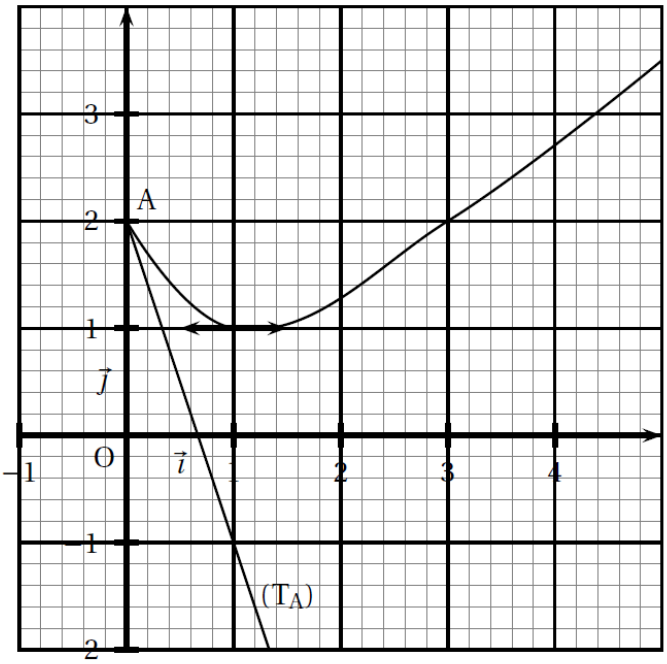
Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

L'allure du nuage suggère de choisir un ajustement parabolique.
On se propose d'ajuster le nuage par une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$, x étant un nombre réel supérieur ou égal à 1.
a. Déterminer les réels a, b et c pour que la parabole passe par les points de coordonnées $(0\,;5)$, $(1\,;5)$ et $(5\,;105)$
b. En utilisant cet ajustement, en quelle année peut-on prévoir que le chiffre d'affaires du commerce équitable en France dépassera le double de celui de 2007 ?

Exercice 3 – Pour les élèves n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité – 5 points.

La courbe ci-contre représente une fonction f définie et dérivable sur [0 **; + õ** [dans le repère $(O,$Å,Å$)$
On note f' la fonction dérivée de f.

La droite (T_A) est la tangente au point A d'abscisse 0.
La courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse 1.
Enfin la fonction f est croissante sur [1 **; + õ** [et sa limite en **+ õ** est **+ õ**.



1. A partir des informations portées sur le graphique et complétées par les précisions précédentes, répondre aux questions suivantes :
   a. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous :

x	0	1
$f(x)$		
$f'(x)$		

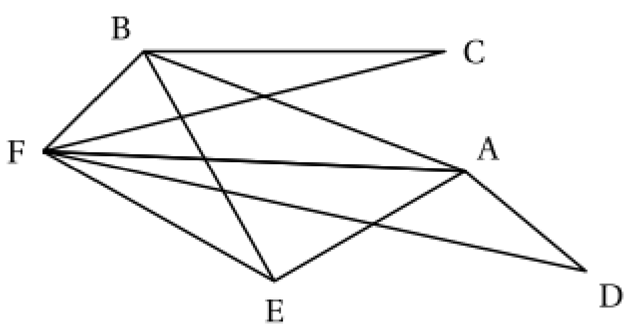
   b. Donner le tableau de variations de f sur [0 **; + õ** [, complété par la limite en **+ õ**.

2. On considère la fonction g inverse de la fonction f, c'est-à-dire $g = \frac{1}{f}$
   On note g' la fonction dérivée de g.
   a. Déterminer $g(0)$, $g(1)$ et $g(3)$
   b. Quel est le sens de variation de la fonction g sur [0 **; + õ** [? Justifier la réponse donnée.
   c. Déterminer les valeurs de $g'(0)$ et $g'(1)$.
   d. Déterminer la limite de g en **+ õ**

3. On souhaite traduire graphiquement les informations obtenues pour la fonction g. Tracer une courbe qui satisfait aux résultats obtenus à la question 2, dans un repère orthonormal (unité 2cm) ; le tracé des tangentes aux points d'abscisses 0 et 1 devra apparaitre sur la figure.

Exercice 3 –Pour les élèves ayant suivi l'enseignement de spécialité – 5 points
Cet exercice est à rendre **<u>sur une feuille à part</u>**.

Les parties A et B sont indépendantes.
<u>Partie A</u>
On considère le graphe G_1 ci-dessous :



1° Justifier les affirmations suivantes :
A_1. Le graphe G_1 admet au moins une chaîne eulérienne.
A_2. La chaîne DABCFBEFAE n'est pas une chaîne eulérienne de G_1.
2° Déterminer un sous-graphe complet de G_1, ayant le plus grand ordre possible.
En déduire un minorant du nombre chromatique γ de ce graphe.

3° Déterminer un majorant de ce nombre chromatique. (On justifiera la réponse).
4° En proposant une coloration du graphe G1, déterminer son nombre chromatique.

Partie B

Soit la matrice M d'un graphe orienté G2 dont les sommets A, B, C, D et E sont pris dans l'ordre alphabétique.

On donne $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M^3 = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 4 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 5 & 3 & 6 \\ 5 & 7 & 4 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

1° Construire le graphe G_2.
2° Déterminer en justifiant votre réponse, le nombre de chaînes de longueur 3 reliant B à D. Les citer toutes.

Exercice 4 – Commun à tous les candidats – 5 points.

Partie A.

On considère la fonction g définie sur [1 **; + õ** [par :

$$g(x) = \ln x - \frac{1}{2}$$

1. Étudier les variations de g sur [1 **; + õ** [

2. Résoudre l'équation $g(x) = 0$ dans [1 **; + õ** [

3. En déduire que $g(x) > 0$ si et seulement si $x > \sqrt{e}$

Partie B

On considère la fonction f définie sur [1 **; + õ** [par :

$$f(x) = 2x^2(\ln x - 1) + 2$$

1. Déterminer la limite de f en **+** õ.

2. On appelle f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle [1 **; + õ** [
 a. Montrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle [1 **; + õ** [, $f'(x) = 4xg(x)$
 b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur [1 **; + õ** [et en déduire le tableau de variations de f sur [1 **; + õ** [.

3. **a.** Montrer que dans l'intervalle [2 **;** 3], l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique notée α.
 b. Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.