Correction – devoir commun TES – mai 2011

Exercice 1 **(5 points)**

Partie A (+0,5 par bonne réponse ; -0,25 par mauvaise réponse)

a. $\boxed{FAUX}$ car $f(\ln(2)) = e^{-\ln(2)} - 1 = e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$

Ou encore : $f(\ln(2)) = e^{-\ln(2)} - 1 = \frac{1}{e^{\ln(2)}} - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$

b. $\boxed{VRAI}$ car $\lim_{x\to+\infty} -x = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} e^x - 1 = 0 - 1 = -1$ et on conclut par composition.

c. $\boxed{FAUX}$ car f est de la forme $e^u - 1$ avec $u(x) = -x$ et donc $u'(x) = -1$ donc $f'(x) = u'(x)e^{u(x)} = -e^{-x}$

d. $\boxed{VRAI}$ car si $-1 \leq x \leq 0$ alors $1 \geq -x \geq 0$ d'où $e^1 \geq e^{-x} \geq 1$ et donc $e^1 - 1 \geq f(x) \geq 0$. La fonction f est donc positive sur $[-1; 0]$ et la fonction F vérifie $F' = f$ donc la dérivée de F sur $[-1; 0]$ est positive donc F est croissante.

e. $\boxed{VRAI}$ car $F'(x) = -(-e^{-x}) - 1 = e^{-x} - 1 = f(x)$ et $F(0) = 1 - e^0 - 0 = 1 - 1 = 0$.

Partie B

1) Pour $x \in \mathbb{R}$:

$f(x) > 0 \Leftrightarrow e^{-x} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{-x} > 1 \Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow x < 0$ Donc $\boxed{S =]-\infty; 0[}$ (0,5)

$\ln(f)$ est définie pour les valeurs de x telles que $f(x) > 0$ donc g est bien définie sur $]-\infty; 0[$.

2) En $-\infty$:

$\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - 1 = +\infty$ donc par composition $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ donc par composition $\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$ (0,5)

3) En 0 :

$\lim\limits_{x\to0} f(x) = f(0) = e^0 - 1 = 0$; $\lim\limits_{x\to0} \ln(x) = -\infty$ donc par composition $\boxed{\lim\limits_{x\to0} g(x) = -\infty}$ (0,5)

4) $\ln(f)$ et f ont les mêmes variations. Or $f'(x) = -e^{-x} < 0$ donc f est strictement décroissante donc $\boxed{g \text{ est également décroissante.}}$ (1 avec justification)

Exercice 2 **(4 points)**

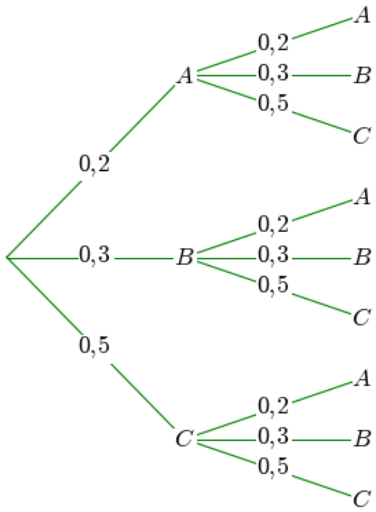
1) Il n'y a que trois secteurs possibles : A, B et C donc $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ d'où :

$p_3 = 1 - p_1 - p_2 = 1 - 0,2 - 0,3 = \boxed{0,5}$ (0,5)

La probabilité que le secteur C soit repéré est de 0,5.

2) $p(A; B) = p(A) \times p(B)$ car les deux lancers sont indépendants l'un de l'autre.

$p(A; B) = 0,2 \times 0,3 = \boxed{0,06}$ (0,5)



3) (1)

Secteur repéré au premier lancer	A	B	C
A	0,04	0,06	0,1
B	0,06	0,09	0,15
C	0,1	0,15	0,25

4) Pour ne pas obtenir le secteur C, on peut obtenir deux fois A, deux fois B ou $(A; B)$ ou encore $(B; A)$.

En notant D l'événement « ne pas obtenir le secteur C » :

$p(D) = 0,04 + 0,06 + 0,06 + 0,09 = \boxed{0,25}$ (0,5)

5)

a. (0,5)

$p(-10€) = p(D) = 0,25$

$p(1€) = 0,1 + 0,15 + 0,1 + 0,15 = 0,5$

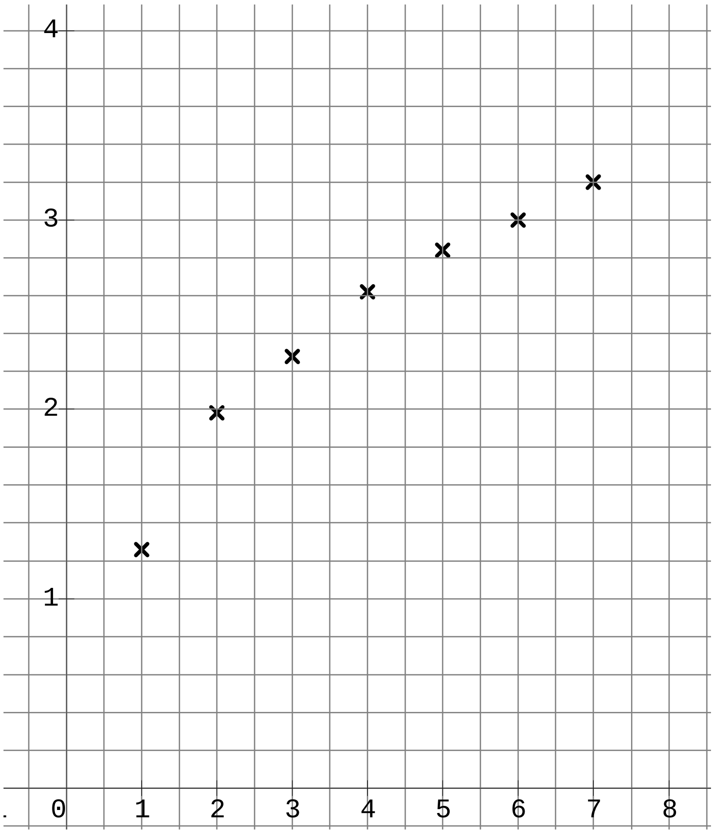
Gain (en euros)	-10	1	8
Probabilité	0,25	0,5	0,25

b. $E = -10 \times 0,25 + 1 \times 0,5 + 8 \times 0,25 = -2,5 + 0,5 + 2 = \boxed{0}$

Le gain moyen est nul donc cela signifie que si on joue un grand nombre de fois, on ne gagnera rien et on ne perdra rien en moyenne. Le jeu est équitable. (0,5+0,5)

Exercice 3 (5 points)

1) (1)



2) (0,5)

x_i	1	2	3	4	5	6	7
$z_i = e^{y_i}$	3,53	7,24	9,78	13,74	17,12	20,09	24,53

3) A l'aide de la calculatrice, on trouve $\boxed{z = 3{,}43x}$ (1)

4) $z = e^y = 3{,}43x$ donc $y = \ln(3{,}43x) = \ln(3{,}43) + \ln(x) \approx \boxed{1{,}23 + \ln(x)}$ (0,5)

5)

a. L'année 2008 correspond à $x = 10$ et on a alors :

$y = 1{,}23 + \ln(10) \approx 3{,}53$

Le profit annuel attendu en 2008 est de 3,53 millions d'euros. (1)

b. Le profit annuel initial est de 1,26 millions d'euros. On doit donc résoudre $y \geq 3 \times 1{,}26$:

$y \geq 3 \times 1{,}26 \Leftrightarrow 1{,}23 + \ln(x) \geq 3{,}78 \Leftrightarrow \ln(x) \geq 2{,}55 \Leftrightarrow x \geq e^{2{,}55} \Leftrightarrow x \geq 12{,}8$ (1)

On doit donc attendre 13 ans et c'est en 2011 que le profit annuel attendu dépassera le triple du profit annuel initial.

Exercice 4 (6 points)

1)

a. Une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0 est $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$.

Or $f(x) = e^x - 1$ et donc $f'(x) = e^x$.

$f(0) = e^0 - 1 = 0$ et $f'(0) = e^0 = 1$.

Une équation de T est donc $\boxed{y = x}$ (0,5)

b. Voir le graphique (0,5)

2)

a. $g(0) = \frac{3}{e^0+1} = \boxed{\frac{3}{2}}$ (0,5)

b. En $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x + 1 = +\infty$ et donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0}$

Graphiquement, cela signifie que la droite d'équation $y = 0$, autrement dit l'axe des abscisses est asymptote à la courbe de g en $+\infty$. (0,5+0,5)

c. g est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u: x \mapsto 3$ et $v: x \mapsto e^x + 1$ donc $u'(x) = 0$ et $v'(x) = e^x$.

$g'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \boxed{= -\frac{3e^x}{(e^x+1)^2}}$ (0,5 dérivée ; 0,5 variations)

Sur $[0; +\infty[$, e^x est strictement positif, tout comme $(e^x + 1)^2$ car un carré est toujours positif. Finalement $g'(x)$ est négatif et donc g est strictement décroissante.

x	0	$+\infty$
Variations de g	$\frac{3}{2}$ ↘	0

d. Voir le graphique (0,5)

3)

a. Voir le graphique (0,5)

b. $f(\ln(2)) = e^{\ln(2)} - 1 = 2 - 1 = 1$

$$g(\ln(2)) = \frac{3}{e^{\ln(2)} + 1} = \frac{3}{2 + 1} = 1$$

$g(\ln(2)) = \mathrm{f}(\ln(2))$ or d'après l'énoncé, l'équation $f(x) = g(x)$ a une unique solution donc cette solution est $\ln(2)$. (1)

Autre méthode :

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow e^x - 1 = \frac{3}{e^x + 1} \Leftrightarrow (e^x - 1)(e^x + 1) = 3 \Leftrightarrow e^{2x} - 1 = 3 \Leftrightarrow e^{2x} = 4 \Leftrightarrow 2x = \ln(4)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln(4) \Leftrightarrow x = \ln(2)$$

4) G est de la forme $u - 3\ln(v)$ avec $u(x) = 3x$ et $v(x) = e^x + 1$ donc $u'(x) = 3$ et $v'(x) = e^x$.

$$G'(x) = u'(x) - \frac{3v'(x)}{v(x)} = 3 - \frac{3e^x}{e^x + 1} = \frac{3(e^x + 1) - 3e^x}{e^x + 1} = \frac{3e^x + 3 - 3e^x}{e^x + 1} = \frac{3}{e^x + 1} = g(x)$$

Ceci montre que G est une primitive de g sur $[0; +\infty[$. (0,5)