Devoir maison n°12

Exercice 1

Une entreprise a lancé sur le marché un produit informatique en 1990. Une étude statistique a permis d'établir les taux des ménages équipés entre 1993 et 2002.
Les résultats de cette étude sont consignés dans le tableau ci-dessous :

Année	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Taux de ménages équipés y_i	0,20	0,22	0,32	0,34	0,35	0,43	0,48	0,49	0,53	0,60

Cette entreprise doit prévoir une reconversion dès que 90% des ménages seront équipés, c'est-à-dire dès que le taux des ménages équipés sera égal à 0,9. Pour faire cette étude prévisionnelle, elle envisage deux types d'ajustement.
Dans tout le problème, le plan est muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.
(Unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses, 20 cm sur l'axe des ordonnées).
Les parties B et C peuvent être traitées indépendamment de la partie A.

<u>Partie A - Ajustement affine</u>

1) Représenter en couleur le nuage de points associé à la série statistique $(x_i; y_i)$ dans le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$
2) Donner une équation de la droite D d'ajustement affine de *y* en *t* par la méthode des moindres carrés. On ne demande pas le détail des calculs et les valeurs seront arrondies à 10^{-3}.
3) Représenter D dans le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.
4) Pourquoi cet ajustement ne permet-il pas d'effectuer des prévisions après l'année 2011 ?

<u>Partie B - Ajustement logistique</u>

On suppose que la situation est modélisée par la fonction *f* , définie et dérivable sur $[0; +\infty[$, telle que

$$f(x) = \frac{1}{1+4e^{-0,2t}}$$

Le nombre $f(x)$ donne en fonction du rang x de l'année le taux des ménages équipés. On note C la courbe représentative de *f* dans le repère $[0; +\infty[$.

1) Calculer la limite de *f* en $+\infty$ et en déduire que C admet une asymptote notée d dont on donnera une équation.
2) Vérifier que, pour tout réel x de $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{0,8e^{-0,2x}}{(1+4e^{-0,2x})^2}$.

En déduire le sens de variation de *f* puis dresser son tableau de variations.

3) Tracer C et d dans le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.
4) Résoudre algébriquement l'inéquation $f(x) > 0,9$.

<u>Partie C - Application</u>

Dans cette partie, les pourcentages seront arrondis à l'unité.
On suppose que *f* (x) est une approximation satisfaisante, au moins jusqu'en 2013, du taux des ménages équipés de ce produit informatique. À l'aide de cette approximation et des résultats de la **partie B**, déterminer :

1) Le pourcentage des ménages équipés de ce produit informatique en 2008.
2) L'année à partir de laquelle 90% des ménages seront équipés.

Exercice 2

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^{x} - 1$.

1)

a. Le tableau ci-dessous est le tableau de variations de . Justifier toutes les affirmations qui sont notées dans ce tableau :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de g	-1	$\searrow$	$-\frac{1}{e} - 1$	$\nearrow$	$+\infty$

b. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α. Donner une valeur approchée à 10^{-1} de α. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

2) On note f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = e^{x} - \ln(x)$.

a. Étudier la limite de f en 0.

b. Vérifier que, pour $x > 0$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$.

c. Dresser le tableau de variations de , en admettant que la limite de f en $+\infty$ est $+\infty$.