Correction devoir maison n°12

Exercice 1

Partie A

1) Voir le repère
2) A la calculatrice, l'équation de la droite d'ajustement est $\boxed{y = 0{,}043x + 0{,}202}$
3) Voir le repère
4) 2011 correspond au rang $2011 - 1993 = 18$ or, l'ajustement affine prévoit en 2011, un taux de ménages équipés d'environ 97,6% car $0{,}043 \times 18 + 0{,}202 = 0{,}976$ et en 2012, le taux serait de 101,6% car $0{,}043 \times 19 + 0{,}202 = 1{,}016$ ce qui est impossible car il ne peut pas y avoir plus de 100% de ménages équipés !

L'ajustement affine n'est donc utilisable que jusqu'en 2011.

Partie B

1) $\lim_{x\to+\infty} -0{,}2x = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} e^{-0{,}2x} = 0$.

On obtient alors par opérations, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1}$

Ceci montre que la courbe de f admet une asymptote horizontale d d'équation $y = 1$ en $+\infty$.

2) Pour $x > 0$: f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u: x \mapsto 1$ donc $u'(x) = 0$ et $v: x \mapsto 1 + 4e^{-0{,}2x}$ donc $v'(x) = 4 \times (-0{,}2)e^{-0{,}2x} = -0{,}8e^{-0{,}2x}$ donc

$$f'(x) = \frac{-(-0{,}8e^{-0{,}2x})}{(1+4e^{-0{,}2x})^2} = \boxed{\frac{0{,}8e^{-0{,}2x}}{(1+4e^{-0{,}2x})^2}}$$

Le numérateur est positif car l'exponentielle est strictement positive et le dénominateur est positif car un carré est toujours positif donc $f'(x) > 0$ et la fonction f est strictement croissante.

x	0	$+\infty$
Variation de f	$\frac{1}{5}$ ↗	1

3) Voir le repère
4) Pour $x > 0$:

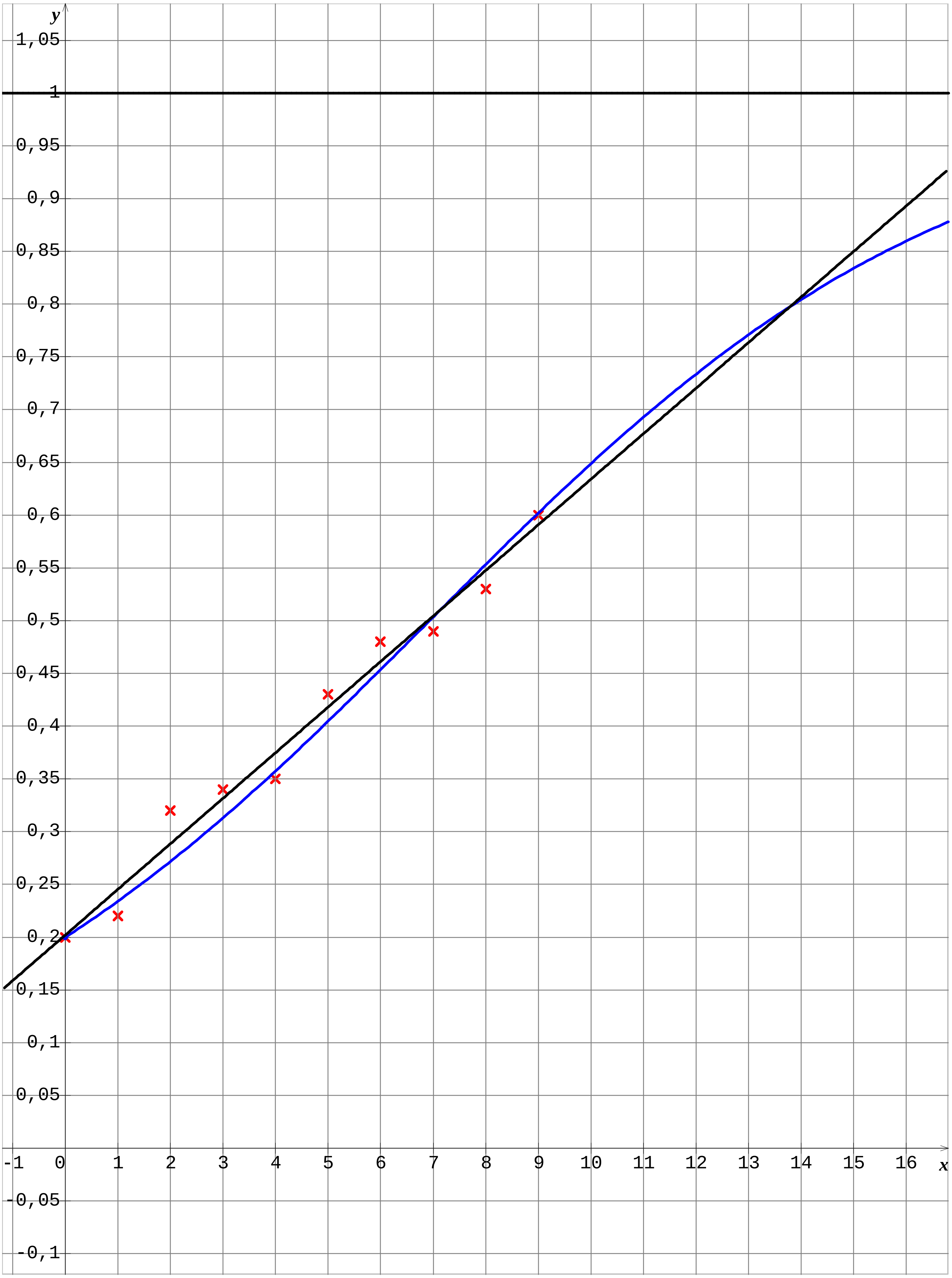
$$f(x) \geq 0{,}9 \Leftrightarrow \frac{1}{1+4e^{-0{,}2x}} \geq \frac{9}{10} \Leftrightarrow 1 + 4e^{-0{,}2x} \leq \frac{10}{9} \Leftrightarrow 4e^{-0{,}2x} \leq \frac{10}{9} - 1 \Leftrightarrow e^{-0{,}2x} \leq \frac{1}{9} \times \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow -0{,}2x \leq \ln\left(\frac{1}{36}\right) \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{0{,}2} \times \ln\left(\frac{1}{36}\right) \Leftrightarrow x \geq 5\ln(36)$$

Donc $\boxed{S =]5\ln(36)\,;+\infty[}$

Partie C

1) 2008 correspond au rang 15 car $2008 - 1993 = 15$ donc le taux des ménages en 2008 sera d'environ $\boxed{83\%}$ car $f(15) = \frac{1}{1+4e^{-0{,}2\times15}} = \frac{1}{1+4e^{-3}} = 0{,}834$
2) 90% des ménages équipés signifie que $f(x) \geq 0{,}9$ or d'après la question 4 de la partie B, ceci est vrai pour $x \geq 5\ln(36)$. L'application numérique donne $x \geq 18$. Le rang 18 correspond à l'année 2011 donc c'est $\boxed{\text{en 2011}}$ que plus de 90% des ménages seront équipés.



y
1,05
1
0,95
0,9
0,85
0,8
0,75
0,7
0,65
0,6
0,55
0,5
0,45
0,4
0,35
0,3
0,25
0,2
0,15
0,1
0,05
-0,05
-0,1
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
x

Exercice 2

1) $g(x) = xe^x - 1$

a. g est de la forme $uv - 1$ avec u et v deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = e^x + xe^x = (1 + x)e^x$.

$e^x > 0$ car l'exponentielle est toujours strictement positive. Donc $g'(x)$ est du signe de $1 + x$ sur $\mathbb{R}$.

Autrement dit $g'(x)$ est négatif sur $]-\infty; -1]$ et positif sur $[-1; +\infty[$. On en déduit que g est décroissante sur $]-\infty; -1]$ et croissante sur $[-1; +\infty[$. Ceci valide bien les variations du tableau de l'énoncé.

En $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0 \quad \text{(c'est du cours) donc} \boxed{\lim_{x\to-\infty} g(x) = -1}$$

En $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \ \text{ donc par produit et en soustrayant 1 :} \boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$$

En -1 :

$$g(-1) = -1e^{-1} - 1 = \boxed{-\frac{1}{e} - 1}$$

b. Sur$[0; -1]$, g est strictement décroissante et a pour maximum -1 donc g est strictement négative et $g(x) = 0$ n'a aucune solution.

Sur $[-1; +\infty[$, g est continue car dérivable, strictement croissante et 0 est bien compris entre $g(-1)$ et la limite de g en $+\infty$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution.

A l'aide de la calculatrice, on trouve $\boxed{\alpha \approx 0{,}6}$

Sur $]-\infty; \alpha]$, g est négative et sur $[\alpha; +\infty[$ g est positive.

2) $f(x) = e^x - \ln(x)$ définie sur $]0; +\infty[$

a. $\lim_{x\to0^+} e^x = e^0 = 1$ et $\lim_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty$ donc par soustraction $\boxed{\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty}$

b. Pour $x > 0$:

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{x} = \frac{xe^x - 1}{x} = \boxed{\frac{g(x)}{x}}$$

c. On en déduit le tableau de variations de f :

x	0		α		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$