# *Correction devoir maison n°2*

**Exercice 53 p 28**

La courbe représentative de $f$ passe par $A(0;1)$ et par $B(1;-2)$ donc $f(0)=1$ et $f(1)=-2$.

Avec l'expression de la fonction : $\boxed{c=1}$ et $a+b+c=-2$ ou encore $\boxed{a+b=-3}$

La tangente au point $B$ d'abscisse 1 a pour coefficient directeur $-4$ car elle est parallèle à la droite d'équation $y=-4x+3$. Ceci nous indique donc que $f'(1)=-4$.

Or $f$ est une fonction polynôme donc est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=3ax^2+2bx$.

Donc $f'(1)=3a+2b$.

Finalement, $3a+2b=-4$.

On doit donc résoudre le système d'équation : $\begin{cases} a+b=-3 \\ 3a+2b=-4 \end{cases}$.

$$\begin{cases} a+b=-3 \\ 3a+2b=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3-b \\ 3(-3-b)+2b=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3-b \\ b=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-5 \end{cases}$$

Finalement, $\boxed{f(x)=2x^3-5x^2+1}$

**Exercice 58 p 75**

1) $f: x \mapsto \frac{-x^2+4}{x+3}$

   a. Pour $x \in ]-3;+\infty[$ :

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x+3} \Leftrightarrow \frac{-x^2+4}{x+3}=\frac{(ax+b)(x+3)}{x+3}+\frac{c}{x+3}$$
$$\Leftrightarrow \frac{-x^2+4}{x+3}=\frac{ax^2+3ax+bx+3b+c}{x+3}$$
$$\Leftrightarrow \frac{-x^2+4}{x+3}=\frac{ax^2+(3a+b)x+(3b+c)}{x+3}$$

Par identification, on obtient : $\begin{cases} a=-1 \\ 3a+b=0 \\ 3b+c=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=3 \\ c=-5 \end{cases}$

Donc, pour tout $x \in ]-3;+\infty[$, $\boxed{f(x)=-x+3-\frac{5}{x+3}}$

   b. $f$ est une fonction rationnelle dont on cherche la limite en $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} -\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty} -x=-\infty$$

   c. On souhaite démontrer que la droite d'équation $y=-x+3$ est une asymptote oblique à $C_f$ en $+\infty$ donc on calcule la limite de $f(x)-(-x+3)$ en $+\infty$. Or :

$$f(x)-(-x+3)=-x+3-\frac{5}{x+3}+x-3=-\frac{5}{x+3}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(-x+3)=\lim_{x\to+\infty} -\frac{5}{x+3}=0 \text{ car } \lim_{x\to+\infty} x+3=+\infty$$

On en déduit que $\mathcal{D}$ est bien une asymptote oblique à $C_f$ en $+\infty$.

   d. Pour étudier la position relative de $C_f$ et $\mathcal{D}$, on étudie le signe de $f(x)—x+3$ donc de $\frac{-5}{x+3}$.

Or, sur $]-3;+\infty[$, $x+3>0$ et $-5<0$ donc $f(x)-(-x+3)$ est strictement positif ce qui signifie que $C_f$ est au dessus de $\mathcal{D}$.

2) Pour déterminer si $C_f$ admet une asymptote verticale, on calcule la limite de $f$ en $-3$ :

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to-3} -x^2+4 &= -(-3)^2+4=-5 \\ \lim_{x\to-3} x+3 &= 0^+ \end{aligned}\right\} \text{ donc, par quotient } \lim_{x\to-3} f(x)=-\infty$$

   Ce calcul nous montre que la droite verticale d'équation $x=-3$ est une asymptote verticale de $C_f$.

# Correction de la partie calculatoire

**Exercice 1**

$$A=\frac{x-5}{6}+\frac{3-2x}{7}=\frac{(x-5)\times 7+6(3-2x)}{6\times 7}=\frac{7x-35+18-12x}{42}=\boxed{\frac{-5x-17}{42}}$$

$$B=\frac{5x+1}{x-3}-\frac{2+x}{5}=\frac{(5x+1)\times 5-(x-3)(2+x)}{5\times(x-3)}=\frac{25x+5-(2x+x^2-6-3x)}{5(x-3)}$$

$$=\frac{25x+5-2x-x^2+6+3x}{5(x-3)}=\boxed{\frac{-x^2+26x+11}{5(x-3)}}$$

$$C=\frac{(6+2x)(x-1)+(x+2)(7+x)}{(x+2)(x-1)}=\frac{6x-6+2x^2-2x+7x+x^2+14+2x}{(x+2)(x-1)}=\boxed{\frac{3x^2+13x+8}{(x+2)(x-1)}}$$

$$D=\frac{2-x}{x}-\frac{3+x}{x+1}=\frac{(2-x)(x+1)-x(3+x)}{x(x+1)}=\frac{2x+2-x^2-x-3x-x^2}{x(x+1)}=\boxed{\frac{-2x^2-2x+2}{x(x+1)}}$$

$$E=\frac{7x-4}{x+2}-\frac{5-2x}{3-x}=\frac{(7x-4)(3-x)-(x+2)(5-2x)}{(x+2)(3-x)}=\frac{21x-7x^2-12+4x-(5x-2x^2+10-4x)}{(x+2)(3-x)}$$

$$=\frac{21x-7x^2-12+4x-5x+2x^2-10+4x}{(x+2)(3-x)}=\boxed{\frac{-5x^2+24x-22}{(x+2)(3-x)}}$$

**Exercice 2**

1) $A$ est un polynôme de degré 2 avec $\Delta=(-4)^2-4\times 5\times(-9)=16+180=196$ donc $A$ est du signe de $a=5$ sauf entre les racines : $x_1=\frac{4+14}{10}=1{,}8$ et $x_2=\frac{4-14}{10}=-1$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1{,}8$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $A$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

2) $B$ est un produit : le premier facteur est un polynôme de degré 1 qui s'annule en 5. Le second facteur est un polynôme de degré 2, avec $\Delta=14^2-4\times 3\times(-5)=196+60=256$ donc $3+14x-5x^2$ est du signe de $a=-5$ sauf entre les racines : $x_1=\frac{-14+16}{-10}=-0{,}2$ et $x_2=\frac{-14-16}{-10}=3$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-0{,}2$ | | $3$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $5-x$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| Signe de $3+14x-5x^2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | |
| Signe de $B$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

3) $C$ est une fonction rationnelle. Le numérateur est un polynôme de degré 2 avec $\Delta=-92$ donc $8x^2-2x+3$ est strictement du signe de $a=8$. Le dénominateur s'annule en $-1$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $8x^2-2x+3$ | | $+$ | | $+$ | |
| Signe de $x+1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| Signe de $C$ | | $-$ | $\Vert$ | $+$ | |

4) $D$ est un produit. Le premier facteur est une racine carré donc est toujours strictement positif. Le second facteur est un polynôme de degré 2 avec $\Delta=4$ donc $x^2-1$ est du signe de $a=1$ sauf entre les racines $x_1=1$ et $x_2=-1$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $\frac{1}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $\sqrt{1-2x}$ | | $+$ | | $+$ | |
| Signe de $x^2-1$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| Signe de $D$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

**Exercice 3**

1) $f$ est de la forme $uv$ avec $u(x) = 6x^2 - 4x + 1$ et $v(x) = 3 - 2x$ donc $u'(x) = 12x - 4$ et $v'(x) = -2$.

$f'(x) = (12x - 4)(3 - 2x) + (6x^2 - 4x + 1) \times (-2) = 36x - 24x^2 - 12 + 8x - 12x^2 - 12 + 8x - 2$

$\boxed{f'(x) = -36x^2 + 52x - 14}$

2) $f$ est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = 6 - x$ et $v(x) = x^2 + 1$ donc $u'(x) = -1$ et $v'(x) = 2x$.

$$f'(x) = \frac{-1(x^2 + 1) - 2x(6 - x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 - 1 - 12x + 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \boxed{\frac{x^2 - 12x - 1}{(x^2 + 1)^2}}$$

3) $f$ est de la forme $\sqrt{u}$ avec $u(x) = x^2 + 2x + 3$ donc $u'(x) = 2x + 2$.

$$f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{2x + 2}{2\sqrt{x^2 + 2x + 3}} = \boxed{\frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}}$$

4) $f$ est de la forme $u^n$ avec $u(x) = 10 - 3x$ et $n = 7$ donc $u'(x) = -3$.

$f'(x) = u'(x) \times n \times u^{n-1}(x) = -3 \times 7 \times (10 - 3x)^6 = \boxed{-21(10 - 3x)^6}$