Devoir maison n°3

Pour ceux qui ont la moyenne

Exercice 1

f est la fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$.

1) Avec la calculatrice graphique, conjecturer le nombre de points d'intersection des courbes représentatives de f et g.
2) Montrer que, pour tout x non nul, $f(x) = g(x)$ est équivalent à $x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$.
3) h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1$.
   a. Etudier la limite de h en $+\infty$ puis en $-\infty$.
   b. Calculer la dérivée de la fonction h.
   c. Etudier les variations de h sur $\mathbb{R}$.
   d. Donner une équation de la tangente T à la courbe de la fonction h au point d'abscisse 1
   e. Développer $(x-1)(x^2-1)$. Etudier la position relative de T et de la courbe de h.
   f. Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$.

Avec la calculatrice, donner un encadrement à 0,01 près de cette solution.
Qu'en déduit-on à propos de l'intersection des courbes représentatives de f et g et de la conjecture faite au début de l'exercice ?

Exercice 2

Une étude effectuée sur un certain article a conduit à établir la relation : $f(p) = \frac{10^5 \times 6p}{36p^2 - 100}$ pour $p \in [2; +\infty[$ où p représente le prix du produit en euros et $f(p)$ la demande liés à ce produit pour le prix p.

1) Calculer la demande pour les valeurs suivantes : $p = 2$; $p = 2{,}5$ et $p = 15$ (arrondissez, si nécessaire, à l'unité près).
2) Vérifier que $f(p) > 0$ pour tout $p \in [2; +\infty[$.
3) Montrer que f est décroissante sur $[2; +\infty[$.
4) On suppose que le prix p, initialement égal à 2,5 €, subit une augmentation de 1%.
   a. Calculer le nouveau prix p_1 et la demande correspondante à ce prix, arrondie à l'unité près.
   b. En déduire le pourcentage de variations de la demande consécutive à l'augmentation du prix.
5) On appelle « élasticité » de la demande par rapport au prix, le nombre $E(p) = p \times \frac{f'(p)}{f(p)}$ pour $p \in [2; +\infty[$.

On admettra que ce réel donne une bonne approximation du pourcentage de variation de la demande, pour une augmentation de 1% d'un prix donné.

   a. Quel est le signe de $E(p)$ pour $p \in [2; +\infty[$? Justifier et interpréter ce résultat.
   b. Etablir l'égalité : $E(p) = 1 - \frac{72p^2}{36p^2 - 100}$.
   c. Etudier la limite de $E(p)$ en $+\infty$.
   d. Calculer $E'(p)$ et en déduire le tableau de variation de E.
   e. Calculer la valeur p_0 pour laquelle l'élasticité est de $-1{,}25$.
   f. Comment évolue la demande quand le prix passe de 5€ à 5,5€ ?

731

Devoir maison n°3

Pour ceux qui n'ont pas la moyenne

Exercice 1 : Calcul de dérivées

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$f_1 : x \mapsto 5\sqrt{3x-5}$; $f_2 : x \mapsto (3x-1)\sqrt{6-x}$; $f_3 : x \mapsto \dfrac{4x+2}{2x^2+2x+1}$

Exercice 2 : Calcul de limites

Calculer les limites suivantes (bien détailler tous les calculs) :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}\right)(1-x^2)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x+1)(3-x)}{2x^2+x+5}$; $\lim\limits_{x\to0^+}(\sqrt{x}-4)\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

Exercice 3 : Etude de fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^3+6x^2+9x+1$.

1) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2) Calculer f'.
3) Etudier le signe de f' et en déduire le tableau de variations complet de f.
4) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ a trois solutions dans $\mathbb{R}$, que l'on notera x_1, x_2 et x_3.
5) Déterminer un encadrement à 10^{-2} de chacune de ces solutions.
6) On considère une fonction g définie sur $\mathbb{R}$, dont on connait le tableau de variations :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
Variation de g	5	↘	0	↘	-2	↗	$+\infty$

a. Etudier les variations de la fonction $g\circ f$ sur chacun des intervalles $]-\infty;-3]$, $[-3;-1]$, $[-1;0]$ et $[0;+\infty[$.

b. Déterminer les limites de $g\circ f$ en $+\infty$ et en $-\infty$ puis calculer $g\circ f(-3)$, $g\circ f(-1)$ et $g\circ f(0)$.

c. Dresser le tableau de variations complet de $g\circ f$.