Correction devoir maison n°3

Exercice 1

1) D'après la calculatrice, les deux courbes semblent avoir un unique point d'intersection.
2) Pour $x \neq 0$:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = x^2 - x + \frac{1}{4} + \frac{7}{4} \Leftrightarrow x^2 - x + 2 - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^3 - x^2 + 2x - 1}{x} = 0$$

Or une forme fractionnaire est nulle si et seulement si son numérateur est nul et son dénominateur est non nul.

Donc : $\boxed{f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0}$

3) $h: x \mapsto x^3 - x^2 + 2x - 1$

a. h est un polynôme donc ses limites à l'infini sont égales aux limites de son terme de plus haut degré :

$\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = \boxed{+\infty}$ et de même, $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = \boxed{-\infty}$

b. h est une fonction polynôme donc est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$\boxed{h'(x) = 3x^2 - 2x + 2}$

c. Pour étudier les variations de la fonction f, on doit étudier le signe de f' qui est un trinôme. On calcule donc son discriminant : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times 2 = -20$ donc $h'(x)$ est du signe de $a = 3$ donc toujours positif.

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $h'(x)$		$+$	
Variations de h	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

d. L'équation de la tangente à la courbe de h au point d'abscisse 1 est de la forme : $y = h'(1)(x-1) + h(1)$.

Or $h'(1) = 3$ et $h(1) = 1$ donc l'équation cherchée est $y = 3(x-1) + 1$ ou encore $\boxed{y = 3x - 2}$.

e. $(x-1)(x^2-1) = x^3 - x - x^2 + 1$

Pour étudier la position relative de T et C_h, on doit étudier le signe de $h(x) - x$:

$$h(x) - (3x - 2) = x^3 - x^2 + 2x - 1 - 3x + 2 = x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)(x^2-1) = (x-1)(x-1)(x+1)$$
$$= (x-1)^2(x+1)$$

Le facteur $(x-1)^2$ est toujours positif donc $h(x) - (3x-2)$ est du signe de $x + 1$.

$\boxed{\text{Sur }]-\infty; -1],\ h(x) - x \leq 0 \text{ donc } C_h \text{ est en dessous de } T.}$

$\boxed{\text{Sur } [-1; +\infty[,\ h(x) - x \geq 0 \text{ donc } C_h \text{ est au dessus de } T.}$

f. h est une fonction continue car dérivable, strictement croissante, et 0 est bien compris entre la limite de h en $-\infty$ et celle en $+\infty$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ a une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

Grâce à la calculatrice, on a :

$h(0{,}5) = -0{,}125$ et $h(0{,}6) = 0{,}056$ donc $0{,}5 < \alpha < 0{,}6$

$h(0{,}56) \approx -0{,}02$ et $h(0{,}57) \approx 0{,}0003$ donc $\boxed{0{,}56 < \alpha < 0{,}57}$

D'après la question 2, il est équivalent de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes de f et g et de résoudre $h(x) = 0$. Cette dernière équation ne possédant qu'une unique solution, il y a donc bien un unique point d'intersection entre les courbes de f et g.

Exercice 2

1) $f(2) = \frac{100000 \times 6 \times 2}{36 \times 2^2 - 100} \approx 27273$; $f(2{,}5) = 12000$ et $f(15) = 1125$.

Donc la demande au prix de 2€ est de 27 273 articles environ, pour 2,5€, elle est de 12 000 articles et pour un prix de 15€, elle est de 1125 articles.

2) Pour $p \geq 2$: le numérateur est bien évidemment positif, il reste à étudier le signe du dénominateur.

Pour cela, on peut calculer son discriminant : $\Delta = 4 \times 36 \times 100 = 14400$ donc, $36p^2 - 100$ est du signe de $a = 36$ sauf entre les racines : $x_1 = \frac{120}{72} = \frac{5}{3}$ et $x_2 = -\frac{120}{72} = -\frac{5}{3}$.

Comme p est supérieur à 2, on peut donc dire que $36p^2 - 100$ est positif.

Ceci montre bien que, pour tout $p \in [2; +\infty[$, $\boxed{f(p) > 0}$

3) Pour étudier les variations de f, on peut calculer sa dérivée. Pour cela, on observe que f est de la forme $\frac{u}{v}$:

$$f'(p) = \frac{10^5 \times 6(36p^2 - 100) - 36 \times 2p(10^5 \times 6p)}{(36p^2-100)^2} = \frac{216 \times 10^5 p^2 - 600 \times 10^5 - 432 \times 10^5 p^2}{(36p^2-100)^2} = \frac{-216 \times 10^5 p^2 - 600 \times 10^5}{(36p^2-100)^2}$$

On voit clairement que $f'(p)$ est strictement négatif sur $[2; +\infty[$ donc la fonction $\boxed{f \text{ est décroissante}}$.

4)

a. Augmenter un prix de 1% revient à le multiplier par 1,01 : $p_1 = 2{,}5 \times 1{,}01 \approx 5{,}525$

Donc le nouveau prix est de $\boxed{2{,}525€}$.

$f(2{,}525) \approx 11697$ donc $\boxed{\text{la demande correspondante est de 11 697 articles.}}$

b. La demande est passée de 12 000 articles à 11 697 articles, ce qui représente une variation de 303 articles. $\boxed{\text{Le pourcentage de variations est donc } -2{,}52.}$

En effet, $\frac{valeur\ finale - valeur\ initiale}{valeur\ initiale} \times 100 \approx -2{,}52$

5)

a. D'après les questions précédentes, $f'(p) < 0$; $f(p) > 0$ et $p > 0$ donc $\boxed{E(p) < 0}$

Ceci signifie que le pourcentage de variations de la demande suite à une augmentation du prix de 1% est négatif donc qu'il y a une baisse de la demande.

b. Pour $p \in [2; +\infty[$:

$$E(p) = p \times \frac{-216 \times 10^5 p^2 - 600 \times 10^5}{(36p^2 - 100)^2} \times \frac{36p^2 - 100}{10^5 \times 6p} = \frac{-216p^2 - 600}{6(36p^2 - 100)} = \frac{-36p^2 - 100}{36p^2 - 100} \quad \text{et}$$

$$1 - \frac{72p^2}{36p^2 - 100} = \frac{36p^2 - 100 - 72p^2}{36p^2 - 100} = \frac{-36p^2 - 100}{36p^2 - 100}$$

Donc, nous avons bien $\boxed{E(p) = 1 - \frac{72p^2}{36p^2 - 100}}$

c. En $+\infty$:

$$\lim_{p \to +\infty} \frac{72p^2}{36p^2 - 100} = \lim_{p \to +\infty} \frac{72p^2}{36p^2} = 2 \text{ donc } \boxed{\lim_{p \to +\infty} E(p) = -1}$$

d. $p \mapsto \frac{-72p^2}{36p^2 - 100}$ est de la forme $\frac{u}{v}$...

$$E'(p) = \frac{-144p(36p^2 - 100) - 72p \times (-72p)}{(36p^2 - 100)^2} = \frac{-5184p^2 + 14400p + 5184p^2}{(36p^2 - 100)^2} = \frac{14400p}{(36p^2 - 100)^2}$$

Donc $E'(p)$ est positif et $\boxed{E \text{ est croissant}}$.

e. On doit résoudre $E(p) = -1{,}25$

$$E(p) = -1{,}25 \Leftrightarrow 1 - \frac{72p^2}{36p^2 - 100} = -1{,}25$$

$$\Leftrightarrow -\frac{72p^2}{36p^2 - 100} = -2{,}25$$

$\Leftrightarrow -72p^2 = -2{,}25(36p^2 - 100)$

$\Leftrightarrow -72p^2 = -81p^2 + 225$

$\Leftrightarrow 9p^2 = 225$

$\Leftrightarrow p^2 = 25$

$\Leftrightarrow p = 5$ car p est strictement positif

$\boxed{\text{L'élasticité est de } -1{,}25 \text{ pour un prix } p_0 = 5€.}$

f. Quand le prix passe 5€ à 5,5€, autrement dit quand le prix p_0 subit une hausse de 1%, le pourcentage de variation de la demande est proche de la valeur de l'élasticité qui est de $-1{,}25$. Le pourcentage de variation est donc de $-1{,}25$ ce qui signifie que $\boxed{\text{la demande baisse de 25\%.}}$

Correction devoir maison n°3

Exercice 1

f_1 est de la forme $v \circ u$ avec $u : x \mapsto 3x - 5$ dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $u'(x) = 3$ et $v(x) = 5\sqrt{x}$ dérivable sur $]0; +\infty[$ avec $v'(x) = \frac{5}{2\sqrt{x}}$. Donc f_1 est dérivable sur $]0; +\infty[$ et

$$f_1'(x) = u'(x) \times v'(u(x)) = 3 \times \frac{5}{2\sqrt{3x-5}} = \boxed{\frac{15}{2\sqrt{3x-5}}}$$

f_2 est de la forme $u \times v$ avec $u : x \mapsto 3x - 1$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 3$ et $v : x \mapsto \sqrt{6-x}$ de la forme $w \circ z$ avec $z : x \mapsto 6 - x$ dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $z'(x) = -1$ et $w : x \mapsto \sqrt{x}$ dérivable sur $]0; +\infty[$ avec $w'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Donc v est dérivable sur $]-\infty; 6[$ et $v'(x) = z'(x) \times w'(z(x)) = -1 \times \frac{1}{2\sqrt{6-x}}$.

f_2 est donc dérivable sur $]-\infty; 6[$ et :

$$f_2'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 3\sqrt{6-x} + (3x-1) \times \left(-\frac{1}{2\sqrt{6-x}}\right) = \frac{3\sqrt{6-x} \times 2\sqrt{6-x} - (3x-1)}{2\sqrt{6-x}}$$

$$= \frac{6(6-x) - 3x + 1}{2\sqrt{6-x}} = \boxed{\frac{-9x+37}{2\sqrt{6-x}}}$$

f_3 est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u : x \mapsto 4x + 2$ dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $u'(x) = 4$ et $v : x \mapsto 2x^2 + 2x + 1$ dérivable sur $\mathbb{R}$ qui ne s'annule pas car $\Delta = 2^2 - 4 \times 2 = -4 < 0$, avec $v'(x) = 4x + 2$ donc f_3 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f_3'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{4(2x^2+2x+1) - (4x+2)(4x+2)}{(2x^2+2x+1)^2}$$

$$= \frac{8x^2 + 8x + 4 - 16x^2 - 8x - 8x - 4}{(2x^2+2x+1)^2} = \boxed{\frac{-8x^2 - 8x}{(2x^2+2x+1)^2}}$$

Exercice 2

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc, par addition, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} + \frac{1}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - x^2 = -\infty$ donc, par multiplication, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)(1 - x^2) = -\infty}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(x+1)(3-x)}{2x^2+x+5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2+2x+3}{2x^2+x+5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2}{2x^2} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{2} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

$\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} - 4 = \sqrt{0} - 4 = -4$

$\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ donc, par addition, $\lim\limits_{x\to 0^+} x + \frac{1}{x} = +\infty$

puis, par multiplication, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} (\sqrt{x} - 4)\left(x + \frac{1}{x}\right) = -\infty}$

Exercice 3

1) f est une fonction polynôme donc ses limites à l'infini sont égales aux limites de son terme de plus haut degré :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = \boxed{+\infty}$ et, de même, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = \boxed{-\infty}$

2) $\boxed{f'(x) = 3x^2 + 12x + 9}$

3) f' est un polynôme du second degré donc on calcule son discriminant : $\Delta = 12^2 - 4 \times 3 \times 9 = 36$ donc f' est du signe de $a = 3$ sauf entre les racines : $x_1 = \frac{-12+6}{2\times3} = -1$ et $x_2 = \frac{-12-6}{2\times3} = -3$.

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
Signe de f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f			1				$+\infty$
	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	-3	$\nearrow$	

4) Sur $]-\infty; -3[$, f est strictement croissante, continue et 0 est bien compris entre la limite de f en $-\infty$ et $f(-3)$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f(x) = 0$ a une unique solution dans cet intervalle que nous noterons x_1.

Sur $[-3; -1]$, f est strictement décroissante, continue et 0 est bien compris entre $f(-3)$ et $f(-1)$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution dans cet intervalle, que nous noterons x_2.

Sur $]-1; +\infty[$, f est strictement croissante, continue et 0 est bien compris entre $f(-1)$ et la limite de f en $+\infty$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution dans cet intervalle, que nous noterons x_3.

5) On utilise le tableau de valeurs de la calculatrice pour obtenir des valeurs approchées de x_1, x_2 et x_3 :

x	$-3{,}6$	$-3{,}5$	$-3{,}54$	$-3{,}53$	$-2{,}4$	$-2{,}3$	$-2{,}35$	$-2{,}34$	$-0{,}2$	$-0{,}1$	$-0{,}13$	$-0{,}12$
$f(x)$	$-0{,}3$	$0{,}125$	$-0{,}03$	$0{,}008$	$0{,}136$	$-0{,}127$	$0{,}007$	$-0{,}02$	$-0{,}6$	$0{,}16$	$-0{,}07$	$0{,}005$

Donc $\boxed{-3{,}54 < x_1 < -3{,}53 \;;\; -2{,}35 < x_2 < -2{,}34 \;;\; -0{,}13 < x_3 < -0{,}12}$

6) On considère la fonction g :

a. Sur $]-\infty; -3]$: f est strictement croissante. Ses images appartiennent à $]-\infty; 1]$.

Sur $]-\infty; 1]$, g est décroissante donc $\boxed{g \circ f \text{ est décroissante sur }]-\infty; -3]}$.

Sur $[-3; -1]$, f est décroissante. Ses images appartiennent à $[-3; 1]$. Sur $[-3; 1]$, g est décroissante donc $\boxed{g \circ f \text{ est croissante sur } [-3; 1]}$.

Sur $[-1; 0]$, f est croissante. Ses images appartiennent à $[-3; 1]$ (car $f(0) = 1$). Sur $[-3; 1]$, g est décroissante donc $\boxed{g \circ f \text{ est décroissante sur} [-1; 0]}$.

Sur $[0; +\infty[$ f est croissante. Ses images appartiennent à $[1; +\infty[$. Sur $[1; +\infty[$, g est croissante. Donc $\boxed{g \circ f \text{ est croissante sur } [1; +\infty[}$.

b. Pour les limites de fonctions composées :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ donc, par composition, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g \circ f(x) = +\infty}$

$\lim\limits_{x-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 5$ donc, par composition, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} g \circ f(x) = 5}$

$g \circ f(-3) = g\big(f(-3)\big) = g(1) = \boxed{-2}$ et $g \circ f(-1) = g\big(f(-1)\big) = g(-3) = \boxed{0}$ et $g \circ f(0) = g(1) = \boxed{-2}$

c.

x	$-\infty$		-3		-1		0		$+\infty$
Variations de $g \circ f$	5				0				$+\infty$
		$\searrow$	-2	$\nearrow$		$\searrow$	-2	$\nearrow$	