731

Devoir maison n°4
Ceux qui ont obtenu la moyenne

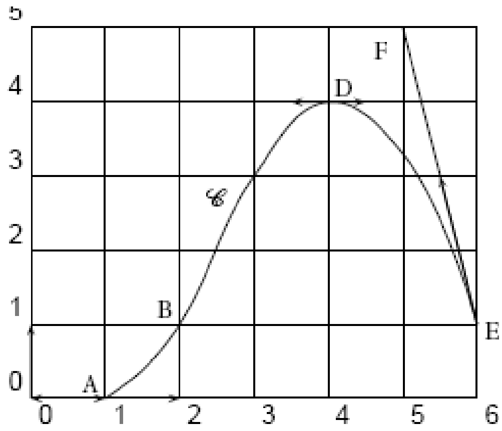
Exercice 1

On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[1;6]$. Sa courbe représentative (C) dans un repère orthogonal est donnée ci-contre.

La courbe (C) passe par les points $A(1;0)$; $B(2;1)$, $D(4;4)$ et $E(6;1)$.

Les tangentes à la courbe aux points A et D sont parallèles à l'axe des abscisses.

La tangente à la courbe au point E passe par le point $F(5;5)$.



Partie I

Par lecture graphique, résoudre l'équation $f(x) = 0$ et donner le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[1;6]$.

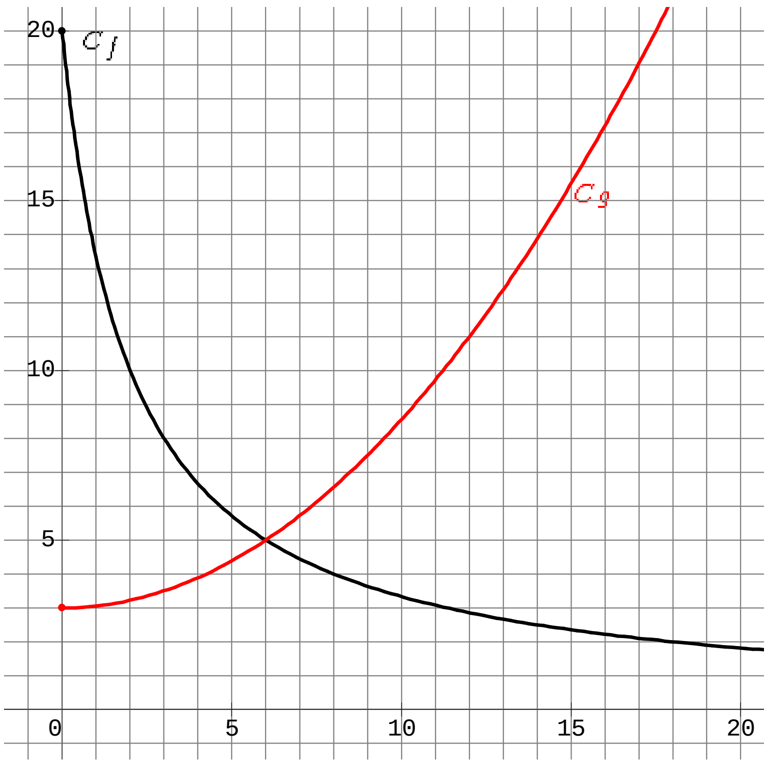
Partie II

On désigne par g la fonction définie sur l'intervalle $]1;6]$ par $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ et (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unité graphique $2\ cm$.

1)
   a. Calculer $g(2)$, $g(4)$ et $g(6)$.
   b. Déterminer la limite de $g(x)$ quand x tend vers 1. Que peut-on en déduire pour la courbe (Γ) ?
   c. Dresser le tableau de variations de la fonction$g$ sur l'intervalle $]1;6]$ en donnant les justifications nécessaires.
   d. Déterminer $f'(4)$; en déduire $g'(4)$.
   e. De la même manière, calculer $g'(6)$.
2) Tracer la courbe (Γ) ainsi que son asymptote et les tangentes au point d'abscisse 4 et 6.

Exercice 2

Sur le graphique ci-contre, sont tracées dans un repère orthogonal, les courbes représentatives C_f et C_g de deux fonctions f et g, dérivables sur $[0;+\infty[$.



Partie A – Questions préliminaires

(les résultats serons donnés à 0,1 près)

1) Résoudre graphiquement les équations $f(x) = 7$ et $f(x) = 4$.
2) Lire graphiquement $g(0)$.
3) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;14]$.
4) En déduire le signe de f' sur l'intervalle $[0;14]$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

Partie B

La fonction f est la fonction demande d'un produit, elle met en correspondance le prix $f(x)$ du produit et la quantité x achetée par les consommateurs.

La fonction g est la fonction d'offre, elle met en correspondance le prix $g(x)$ du produit et la quantité x vendue par les producteurs. La quantité est exprimée en milliers d'unités et le prix en centaines d'euros.

1) A l'aide de la lecture graphique faite en A, répondre aux questions suivantes :
    a. Quelle quantité est achetée par les consommateurs si le prix est de 700€ ? de 400€ ?
    b. Au-dessous de quel prix les producteurs ne sont-ils pas prêts à vendre ?
2) La fonction recette R est définie sur l'intervalle $[0;14]$ par $R(x) = xf(x)$.

Une valeur approchée de la recette marginale (recette pour le $x^{ième}$ produit vendu) est donnée par $R'(x)$ où R' est la fonction dérivée de la fonction R.

On remarque que, pour tout réel x de l'intervalle $[0;14]$, $R'(x) = f(x) + xf'(x)$.

a. Déduire du A4, le signe de $R'(x) - f(x)$ sur l'intervalle $[0;14]$.
b. Comparer alors, pour tout niveau de production, la recette marginale et le prix de vente $f(x)$.

3)
    a. La fonction f représentée sur le graphique est définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par

$f(x) = \dfrac{40}{x+2}$. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Quelle interprétation économique peut-on faire de ce résultat ?

b. La fonction g représentée sur le graphique est définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{18}x^2 + 3$.

Dans un marché à concurrence pure et parfaite, le prix p_0 qui se forme sur le marché selon la « loi de l'offre et de la demande » correspond à l'égalité de l'offre et de la demande, c'est-à-dire à l'ordonnée du point d'intersection I des deux courbes C_f et C_g.

Soit x_0 l'abscisse du point I.

Montrer par le calcul que x_0 est solution de l'équation $x^3 + 2x^2 + 54x - 612 = 0$.

Développer l'expression $(x-6)(x^2 + 8x + 102)$ et résoudre l'équation. En déduire la valeur de x_0.

Calculer p_0.

731

Devoir maison n°4
Ceux qui n'ont pas eu la moyenne

Exercice 1

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{7x^2+6x+2}{1-x}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Calculer les limites de f quand x tend vers 1 (on pourra étudier les cas $x < 1$ et $x > 1$) .
3) Montrer que la droite d'équation $y = -7x - 13$ est une asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
4) En déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

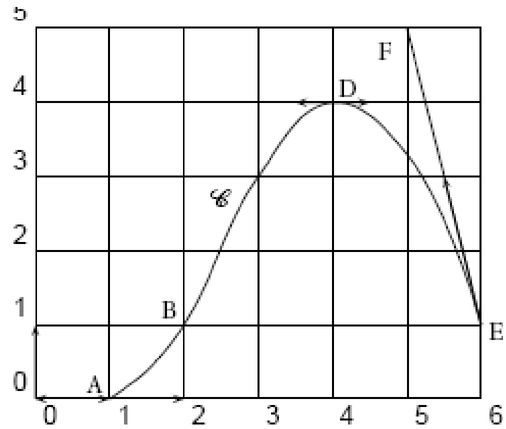
Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{3\}$ par $f(x) = ax + b + \frac{1}{3-x}$ où a et b sont deux réels.

1) Déterminer a et b pour que la courbe C_f passe par $A(2; 1)$ et admette en ce point une tangente horizontale.
2) On considère dans la suite que $f(x) = \frac{x^2-5x+7}{3-x}$.
   a. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = -x + 2$ est asymptote à C_f.
   b. Etudier la position relative de C_f et Δ.
   c. Etudier les limites de f en 3.
   d. Etudier les variations de f.
   e. Représenter C_f, ses asymptotes et sa tangente en A.

Exercice 3

On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[1; 6]$. Sa courbe représentative (C) dans un repère orthogonal est donnée ci-contre.
La courbe (C) passe par les points $A(1; 0)$; $B(2; 1)$, $D(4; 4)$ et $E(6; 1)$.
Les tangentes à la courbe aux points A et D sont parallèles à l'axe des abscisses.
La tangente à la courbe au point E passe par le point $F(5; 5)$.



Partie I

Par lecture graphique, résoudre l'équation $f(x) = 0$ et donner le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[1; 6]$.

Partie II

On désigne par g la fonction définie sur l'intervalle $]1; 6]$ par $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ et (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

1)
   a. Calculer $g(2)$, $g(4)$ et $g(6)$.
   b. Déterminer la limite de $g(x)$ quand x tend vers 1. Que peut-on en déduire pour la courbe (Γ) ?
   c. Dresser le tableau de variations de la fonction$g$ sur l'intervalle $]1; 6]$ en donnant les justifications nécessaires.
   d. Déterminer $f'(4)$; en déduire $g'(4)$.
   e. De la même manière, calculer $g'(6)$.
2) Tracer la courbe (Γ) ainsi que son asymptote et les tangentes au point d'abscisse 4 et 6.