# *Correction devoir maison n°4*
## *Ceux qui ont eu la moyenne*

**Exercice 1 – *Polynésie – juin 1999***

***Partie I***

Par lecture graphique, la courbe de $f$ ne coupe qu'une fois l'axe des abscisses donc l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution dans $[1; 6]$ qui est : $\boxed{1}$.

Graphiquement, la courbe de $f$ est au-dessus de l'axe des abscisses sur $[1; 6]$ donc $\boxed{f(x) \geq 0}$

***Partie II***

1)

a. $g(2) = \frac{1}{f(2)} = \frac{1}{1} = \boxed{1}$ ; $g(4) = \frac{1}{f(4)} = \boxed{\frac{1}{4}}$ ; $g(6) = \frac{1}{f(6)} = \frac{1}{1} = \boxed{1}$

b. $g$ est la composée de la fonction $f$ et de la fonction inverse :

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{donc par composition,} \quad \boxed{\lim_{x\to 1} g(x) = +\infty}$$

Ce résultat montre que la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à la courbe de $g$.

c. Sur $]1; 4]$, la fonction $f$ est croissante et ses images appartiennent à $]0; 4]$.

Sur $]0; 4]$, la fonction inverse est décroissante. Donc la fonction $g$ est décroissante sur $]1; 4]$.

Sur $[4; 6]$, $f$ est décroissante. Ses images appartiennent à $[1: 4]$. Sur $[1; 4]$, la fonction inverse est décroissante.

Donc la fonction $g$ est croissante sur $[4; 6]$.

| $x$ | $1$ | | $4$ | | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Variations de $g$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $\frac{1}{4}$ | $\nearrow$ | $1$ |

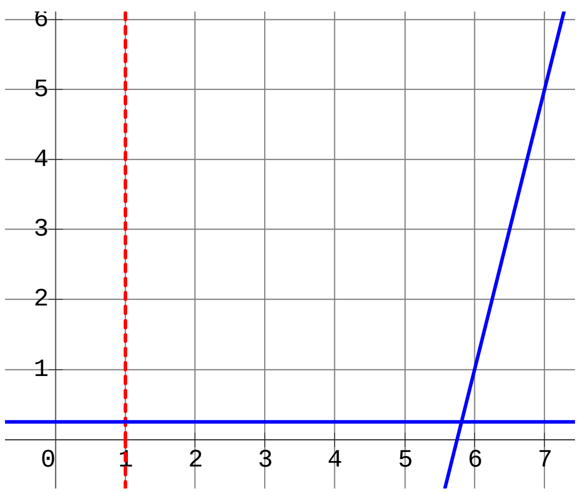
d. $f'(4)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de $f$ au point d'abscisse $4$. Or d'après l'énoncé, cette tangente est horizontale. Donc $\boxed{f'(4) = 0}$.

$g$ est de la forme $\frac{1}{f}$ donc la dérivée de $g$ est de la forme $-\frac{f'}{f^2}$. Autrement dit : $g'(4) = -\frac{f'(4)}{f(4)^2} = \boxed{0}$

e. $f'(6)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de $f$ au point d'abscisse $6$. Or d'après l'énoncé, cette tangente est la droite $(EF)$. Son coefficient directeur est : $\frac{y_F - y_E}{x_F - x_E} = \frac{5-1}{5-6} = -4$. Donc $\boxed{f'(6) = -4}$.

On a ensuite : $g'(6) = -\frac{f'(6)}{f(6)^2} = -\frac{-4}{1^2} = \boxed{4}$.

2) Et voici une courbe possible :



**Exercice 2 – *Amérique du Sud – novembre 1998***

***Partie A***

1) $f(x) = 7$ : la solution est environ $\boxed{3{,}7}$ ; $f(x) = 4$ : la solution est environ $\boxed{8}$
2) $\boxed{g(0) \approx 3}$
3) La fonction $f$ est décroissante sur $[0; 14]$.
4) On en déduit que $f'$ est négative sur $[0; 14]$.

***Partie B***

1)
   a. Si le prix est de $700$€, alors $f(x) = 7$. D'après la partie A, la quantité $x$ correspondante est environ

3,7. Autrement dit, la quantité acheté par les consommateurs est de $\boxed{3\ 700 \text{ produits}}$.

Si le prix est de $400$€, alors $f(x) = 4$ donc $x \approx 8$ et la quantité achetée est alors de $\boxed{8000 \text{ produits}}$

   b. Le prix de vente minimal correspond à $g(0)$, donc à $\boxed{300€}$

2)
   a. $R'(x) - f(x) = xf'(x)$ or sur $[0; 14]$, $x$ est positif et $f'(x)$ est aussi positif (d'après la partie A) donc

$\boxed{R'(x) - f(x) \geq 0}$

   b. La recette marginale est donc toujours supérieure au prix de vente $f(x)$.

3)
   a. $f(x) = \frac{40}{x+2}$ :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{40}{x+2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{40}{x} = \boxed{0}$$

Concrètement, pour vendre un très grand nombre d'objets, le prix de vente doit être proche de 0.

   b. L'abscisse du point d'intersection de $C_f$ et $C_g$ doit vérifier : $f(x) = g(x)$ :

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{40}{x+2} = \frac{1}{18}x^2 + 3 \Leftrightarrow \frac{40 \times 18}{18(x+2)} = \frac{x^2(x+2) + 3 \times 18 \times (x+2)}{18(x+2)}$$

$$\Leftrightarrow 720 = x^3 + 2x^2 + 54x + 108 \Leftrightarrow \boxed{x^3 + 2x^2 + 54x - 612 = 0}$$

$$(x-6)(x^2 + 8x + 102) = x^3 + 8x^2 + 102x - 6x^2 - 48x - 612 = x^3 + 2x^2 + 54x - 612$$

Nous devons donc résoudre : $(x-6)(x^2 + 8x + 102) = 0$ or si un produit est nul alors l'un des facteurs est nul.

Donc $x - 6 = 0$ ou $x^2 + 8x + 102 = 0$.

La première équation donne $x = 6$. Pour la seconde, on calcule le discriminant : $\Delta = 8^2 - 4 \times 102 = -344 < 0$ donc l'équation n'a pas de solutions. Finalement $\boxed{x_0 = 6}$

Il ne reste plus qu'à calculer : $p_0 = f(x_0) = \frac{40}{6+2} = \boxed{5}$

731

# *Correction devoir maison n°4*
# *Ceux qui n'ont pas la moyenne*

**Exercice 1**

1) $f$ possède une valeur interdite 1. Donc $\boxed{D_f = \mathbb{R} - \{1\}}$

2) Pour $x < 1$ :

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} 7x^2 + 6x + 2 = 7 \times 1^2 + 6 \times 1 + 2 = 15$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} 1 - x = 0^+$ donc, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = +\infty}$

Pour $x > 1$ :

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} 7x^2 + 6x + 2 = 7 \times 1^2 + 6 \times 1 + 2 = 15$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} 1 - x = 0^-$ donc, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = -\infty}$

3) Pour $x \neq 1$ :

$$f(x) - (-7x - 13) = \frac{7x^2 + 6x + 2}{1 - x} + \frac{(7x + 13)(1 - x)}{1 - x} = \frac{7x^2 + 6x + 2 + 7x - 7x^2 + 13 - 13x}{1 - x} = \frac{15}{1 - x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{15}{1 - x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{15}{-x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{15}{1 - x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{15}{-x} = 0$$

Donc la droite d'équation $y = -7x - 13$ est bien asymptote oblique à la courbe de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

4)

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{7x^2}{-x} = \lim_{x \to -\infty} -7x = \boxed{+\infty} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{7x^2}{-x} = \lim_{x \to +\infty} -7x = \boxed{-\infty}$$

**Exercice 2**

1) $C_f$ passe par $A(2; 1)$ donc $f(2) = 1$ ce qui signifie que $2a + b + \frac{1}{1} = 1$ ou encore $\boxed{2a + b = 0}$

La tangente à $C_f$ en $A$ est horizontale donc $f'(2) = 0$ car le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse $a$ correspond à $f'(a)$.

Calculons $f'$ : $f$ est de la forme $u + \frac{1}{v}$ avec $u: x \mapsto ax + b$ donc $u'(x) = a$ et $v: x \mapsto 3 - x$ donc $v'(x) = -1$.

$$f'(x) = u'(x) - \frac{v'(x)}{v(x)^2} = a + \frac{1}{(3 - x)^2}$$

$$f'(2) = 0 \Leftrightarrow a + \frac{1}{1^2} = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = -1}$$

On en déduit que $b = -2a = \boxed{2}$.

Finalement : $\boxed{f(x) = -x + 2 + \frac{1}{3-x}}$

2)

a. Pour $x \in \mathbb{R} - \{3\}$ :

$$f(x) - -x + 2 = -x + 2 + \frac{1}{3 - x} + x - 2 = \frac{1}{3 - x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{3 - x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{3 - x} = 0$$

Ceci montre bien que la droite $\Delta$ est une asymptote oblique à $C_f$.

b. Pour étudier la position relative de $C_f$ et $\Delta$, on doit étudier le signe de $f(x) - (-x + 2)$, autrement dit le signe de $\frac{1}{3-x}$.

Sur $]-\infty; 3[$, $3 - x$ est positif donc $\frac{1}{3-x}$ est positif et donc $C_f$ est au dessus de $\Delta$.

Sur $]3; +\infty[$, $3 - x$ est négatif donc $\frac{1}{3-x}$ est négatif et donc $C_f$ est en dessous de $\Delta$.

c. Pour $x < 3$ :

$\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} x^2 - 5x + 7 = 3^2 - 5 \times 3 + 7 = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} 3 - x = 0^+$ donc, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} f(x) = +\infty}$

Pour $x > 3$ :

$\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} x^2-5x+7=3^2-5\times 3+7=1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} 3-x=0^-$ donc, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} f(x)=-\infty}$

d. En utilisant la question 1,

$$f'(x)=a+\frac{1}{(3-x)^2}=-1+\frac{1}{(3-x)^2}=\frac{-(3-x)^2+1}{(3-x)^2}=\frac{-9+6x-x^2+1}{(3-x)^2}=\frac{-x^2+6x-8}{(3-x)^2}$$

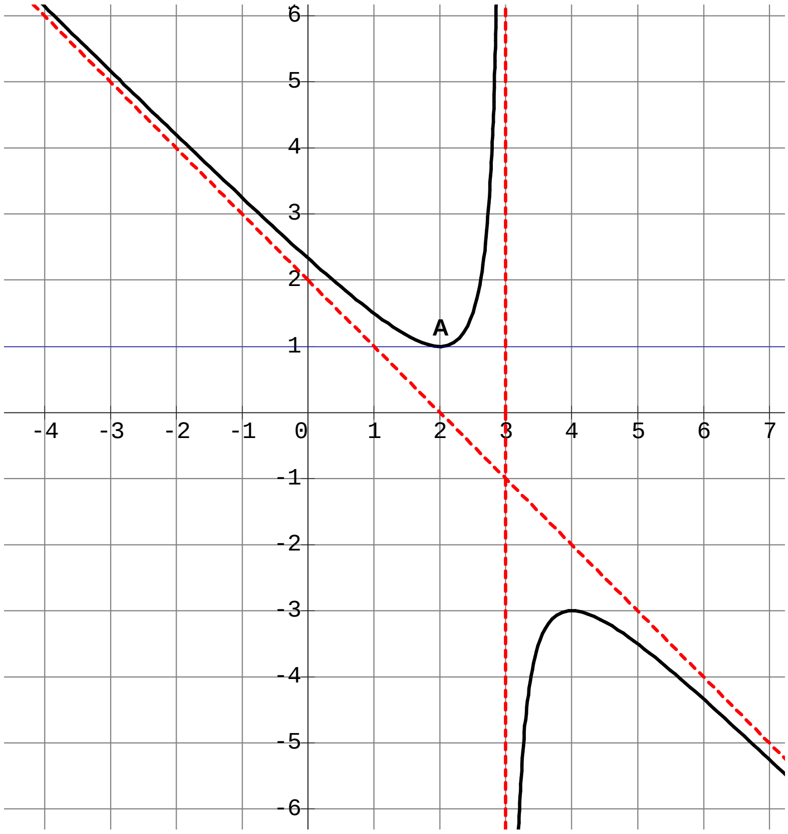
Le signe du dénominateur est bien évidemment positif.

Pour le signe du numérateur, on calcule le discriminant :$\Delta=6^2-4\times(-1)\times(-8)=4$.

Donc, $-x^2+6x-8$ est du signe de $a=-1$ sauf entre les racines : $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-6+2}{-2}=2$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=4$

| $x$ | $-\infty$ | | 2 | | 3 | | 4 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | ‖ | $+$ | 0 | $-$ | |
| Variations de $f$ | $+\infty$ | ↘ | 1 | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $-5$ | ↘ | $-\infty$ |

e. Et voici la courbe :




**Exercice 3 – *Polynésie – juin 1999***

***<u>Partie I</u>***

Par lecture graphique, la courbe de $f$ ne coupe qu'une fois l'axe des abscisses donc l'équation $f(x)=0$ a une unique solution dans $[1;6]$ qui est : $\boxed{1}$.

Graphiquement, la courbe de $f$ est au-dessus de l'axe des abscisses sur $[1;6]$ donc $\boxed{f(x)\geq 0}$

***<u>Partie II</u>***

1)

a. $g(2)=\frac{1}{f(2)}=\frac{1}{1}=\boxed{1}$ ; $g(4)=\frac{1}{f(4)}=\boxed{\frac{1}{4}}$ ; $g(6)=\frac{1}{f(6)}=\frac{1}{1}=\boxed{1}$

b. $g$ est la composée de la fonction $f$ et de la fonction inverse :

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ donc par composition, $\boxed{\lim\limits_{x\to 1} g(x) = +\infty}$

Ce résultat montre que la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à la courbe de $g$.

c. Sur $]1; 4]$, la fonction $f$ est croissante et ses images appartiennent à $]0; 4]$.

Sur $]0; 4]$, la fonction inverse est décroissante. Donc la fonction $g$ est décroissante sur $]1; 4]$.

Sur $[4; 6]$, $f$ est décroissante. Ses images appartiennent à $[1: 4]$. Sur $[1; 4]$, la fonction inverse est décroissante. Donc la fonction $g$ est croissante sur $[4; 6]$.

| $x$ | $1$ | | $4$ | | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Variations de $g$ | $+\infty$ | ↘ | $\frac{1}{4}$ | ↗ | $1$ |

d. $f'(4)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de $f$ au point d'abscisse 4. Or d'après l'énoncé, cette tangente est horizontale. Donc $\boxed{f'(4) = 0}$.

$g$ est de la forme $\frac{1}{f}$ donc la dérivée de $g$ est de la forme $-\frac{f'}{f^2}$. Autrement dit : $g'(4) = -\frac{f'(4)}{f(4)^2} = \boxed{0}$

e. $f'(6)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de $f$ au point d'abscisse 6. Or d'après l'énoncé, cette tangente est la droite $(EF)$. Son coefficient directeur est : $\frac{y_F - y_E}{x_F - x_E} = \frac{5-1}{5-6} = -4$. Donc $\boxed{f'(6) = -4}$.

On a ensuite : $g'(6) = -\frac{f'(6)}{f(6)^2} = -\frac{-4}{1^2} = \boxed{4}$.

2) Et voici une courbe possible :