Devoir maison n°6

Exercice 1

1) Déterminer l'ensemble de définition et calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto \ln(x-1) + \ln(x+1) \quad ; \quad f_2 : x \mapsto \ln\left(\frac{x-3}{x+3}\right) \quad ; \quad f_3 : x \mapsto \frac{\ln(x^2-3x-4)}{x+2} \quad ; \quad f_4 : x \mapsto \frac{\ln(x-3)}{\ln(x)-\ln(3)}$$

2) Démontrer les égalités suivantes :

$$2\ln(3) + \ln(2) = \ln(18) \quad ; \quad \ln(100) + 3\ln\left(\frac{1}{10}\right) = -\ln(10) \quad ; \quad \frac{1}{2}\ln\left(\frac{25}{4}\right) + \ln\left(\frac{2}{7}\right) - \ln\left(\frac{5}{7}\right) = 0$$

3) Résoudre les équations suivantes :

$$\ln(2x^2 - x - 3) = \ln(x-1) \quad ; \quad \ln(x) + \ln(x-2) = \ln(3) \quad ; \quad \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0$$

Exercice 2

Le but de cet exercice est d'étudier l'évolution du prix d'une matière première.
On ne fera qu'un seul graphique qui sera complété tout au long des questions.

Partie A

Le tableau suivant donne le prix d'une tonne de matière première en milliers d'euros au 1er janvier de chaque année

Année	1998	1999	2000	2001
Rang de l'année x_i	0	1	2	3
Prix d'une tonne en milliers d'euros y_i	6,48	5,74	5,19	5,01

1) Sur la copie, représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i ; y_i)$, le plan étant rapporté a un repère orthogonal (unités graphiques : 1 cm pour une année sur l'axe des abscisses, 2 cm pour un millier d'euros sur l'axe des ordonnées).

2) Dans cette question, on envisage un ajustement affine pour modéliser l'évolution du prix de cette matière première.

a. Déterminer une équation de la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés, et la tracer sur le graphique précédent (les calculs seront effectués à la calculatrice et les résultats seront donnés à 10^{-3} près).

b. En supposant que cet ajustement affine reste valable pour les années suivantes, quel serait le prix d'une tonne de matière première au 1er janvier 2005 ?

Partie B

En fait, à partir de l'année 2001, le prix d'une tonne de cette matière première commence à remonter, comme le montre le tableau suivant :

Année	2001	2002	2003	2004
Rang de l'année x_i	3	4	5	6
Prix d'une tonne en milliers d'euros y_i	5,01	5,10	5,20	5,52

1) Placer sur le graphique de la **partie A** les points associés à ce 2*ième* tableau.

2) On désire trouver une fonction qui modélise l'évolution de ce prix sur la période 1998–2008. Pour cela, on considère la fonction *f* définie pour tout *x* de l'intervalle [0 ;11] par $f(x) = x + 10 - 5\ln(x+2)$.
On admet que la fonction *f* est dérivable sur cet intervalle, et on notera f' sa fonction dérivée.

a. Donner un tableau de valeurs de la fonction *f* pour les valeurs de x entières comprises entre 0 et 11. Les valeurs de la fonction seront arrondies à 10^{-2}.

b. Calculer $f'(x)$, puis étudier le sens de variation de la fonction *f* sur l'intervalle [0 ; 11]. Dresser son tableau de variations. Les valeurs des extremums seront données à 10^{-2} près.

c. Tracer la courbe (*C*) représentative de la fonction *f* sur le graphique de la **partie A.**

3) On admet que la fonction *f* modélise l'évolution du prix de cette matière première sur la période 1998–2008.

a. Selon ce modèle, quel serait le prix d'une tonne de matière première au 1er janvier 2005 ?

b. Déterminer en quelle année le prix d'une tonne de matière première retrouvera sa valeur de 1998.