Correction devoir maison n°6

Exercice 1

1) Ensemble de définition :

$f_1 : x \mapsto \ln(x-1) + \ln(x+1)$: pour pouvoir calculer $\ln(x-1)$, il faut que $x - 1 > 0$, c'est-à-dire $x > 1$.
Pour pouvoir calculer $\ln(x+1)$, il faut que $x + 1 > 0$, c'est-à-dire $x > -1$.
Ces deux conditions réunies donnent $\boxed{D_{f_1} =]1; +\infty[}$

$f_2 : x \mapsto \ln\left(\frac{x-3}{x+3}\right)$: pour pouvoir calculer $\ln\left(\frac{x-3}{x+3}\right)$, il faut que $\frac{x-3}{x+3} > 0$ et que $x + 3 \neq 0$. Dressons un tableau de signe

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
Signe de $x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $\frac{x-3}{x+3}$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

On en déduit donc $\boxed{D_{f_2} =]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[}$

$f_3 : x \mapsto \frac{\ln(x^2-3x-4)}{x+2}$: pour pouvoir calculer $\ln(x^2 - 3x - 4)$, il faut que $x^2 - 3x - 4 > 0$ et pour pouvoir diviser par $x + 2$, il faut que $x + 2 \neq 0$, c'est-à-dire que $x \neq -2$.
Résolvons $x^2 - 3x - 4 > 0$: $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 25$ donc $x^2 - 3x - 4$ est du signe de $a = 1$ sauf entre les racines $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+5}{2} = 4$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-5}{2} = -1$. Donc $x^2 - 3x - 4 > 0$ a pour solution $]-\infty; -1[\cup]4; +\infty[$. Les deux conditions réunies donnent $\boxed{D_{f_3} =]-\infty; -2[\cup]-2; -1[\cup]4; +\infty[}$

$f_4 : x \mapsto \frac{\ln(x-3)}{\ln(x)-\ln(3)}$: pour pouvoir calculer les logarithmes, il faut $x - 3 > 0$ et $x > 0$, c'est-à-dire $x > 3$ et $x > 0$ ou encore $x \in]3; +\infty[$. Pour pouvoir diviser par $\ln(x) - \ln(3)$, il faut $\ln(x) - \ln(3) \neq 0$, c'est-à-dire $\ln(x) \neq \ln(3)$ ou encore $x \neq 3$. Finalement, $\boxed{D_{f_4} =]3; +\infty[}$

2)

$$2\ln(3) + \ln(2) = \ln(3^2) + \ln(2) = \ln(9 \times 2) = \boxed{\ln(18)}$$

$$\ln(100) + 3\ln\left(\frac{1}{10}\right) = \ln(100) + \ln\left(\frac{1}{10^3}\right) = \ln\left(\frac{100}{1000}\right) = \ln\left(\frac{1}{10}\right) = \boxed{-\ln(10)}$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{25}{4}\right) + \ln\left(\frac{2}{7}\right) - \ln\left(\frac{5}{7}\right) = \ln\left(\sqrt{\frac{25}{4}}\right) + \ln\left(\frac{2}{7}\right) + \ln\left(\frac{7}{5}\right) = \ln\left(\frac{5}{2} \times \frac{2}{7} \times \frac{7}{5}\right) = \ln(1) = \boxed{0}$$

3)

$$\ln(2x^2 - x - 3) = \ln(x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - x - 3 = x - 1 \\ 2x^2 - x - 3 > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases}$$ Résolvons séparément chaque équation ou inéquation

Pour l'équation : $2x^2 - x - 3 = x - 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 2 = 0$: $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 20$ donc l'équation a deux solutions : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-\sqrt{20}}{4} = \frac{2-2\sqrt{5}}{4} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Pour la première inéquation : $2x^2 - x - 3 > 0$: $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25$ donc $2x^2 - x - 3$ est du signe de $a = 2$ sauf entre les racines $x_3 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+5}{4} = \frac{3}{2}$ et $x_4 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-5}{4} = -1$.
Donc $x \in]-\infty; -1[\cup \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$.
Pour la seconde inéquation : $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$. Finalement :

$$\ln(2x^2 - x - 3) = \ln(x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ x \in]-\infty; -1[\cup \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[\\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{d'où} \quad \boxed{S = \left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}}$$

$$\ln(x) + \ln(x-2) = \ln(3) \Leftrightarrow \begin{cases} \ln\big(x(x-2)\big) = \ln(3) \\ x > 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2) = 3 \\ x > 0 \\ x > 2 \end{cases}$$

Pour l'équation : $x(x-2) = 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$: $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$ donc l'équation a deux solutions $x_1 = -1$ et $x_2 = 3$. Finalement :

$$\ln(x) + \ln(x-2) = \ln(3) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ ou } x = 3 \\ x > 0 \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3 \quad \text{et } \boxed{S = \{3\}}$$

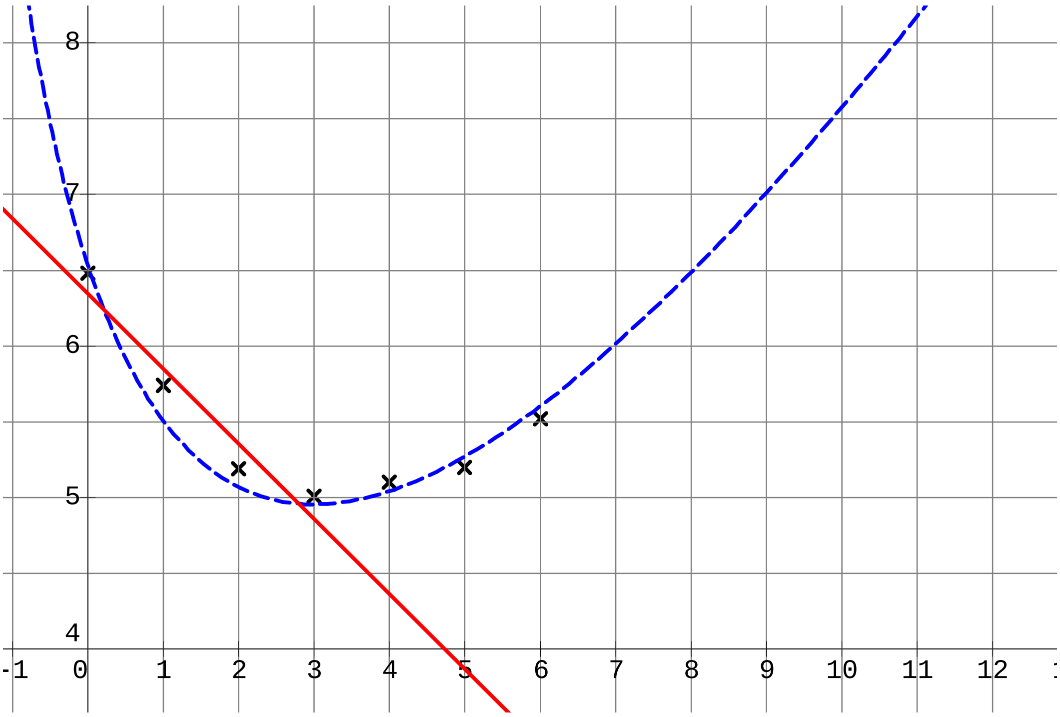
$$\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \ln(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{x+1} = 1 \\ \dfrac{x-1}{x+1} > 0 \end{cases}$$

Pour l'équation : $\frac{x-1}{x+1} = 1 \Leftrightarrow x - 1 = x + 1 \Leftrightarrow 0 = 2$ donc il n'y a pas de solutions… Ce n'est pas la peine de résoudre l'inéquation, on peut conclure : $\boxed{S = \emptyset}$

Exercice 2

Partie A

1)



2)

a. Grâce à la calculatrice : $y = ax + b$ avec $a = -0{,}496$ et $b = 6{,}349$ d'où $\boxed{y = -0{,}496x + 6{,}349}$

b. L'année 2005 correspond à $x = 7$ car $2005 - 1998 = 7$.

$y = -0{,}496 \times 7 + 6{,}349 = 2{,}877$

En 2005, le prix d'une tonne de matière première serait d'environ $\boxed{\text{2,88 milliers d'euros}}$ avec cet ajustement.

Partie B

1) Voir le graphique

2) $f(x) = x + 10 - 5\ln(x+2)$

a. Tableau de valeurs

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$f(x)$	6,53	5,51	5,07	4,95	5,04	5,27	5,6	6,01	6,49	7,01	7,58	8,18

b. f est de la forme $u - 5\ln(v)$ avec $u: x \mapsto x + 10$ dérivable sur $[0; 11]$ avec $u'(x) = 1$ et $v: x \mapsto x + 2$ dérivable sur $[0; 11]$ avec $v'(x) = 1$. Donc f est dérivable sur $[0; 11]$ et :

$$f'(x) = u'(x) - 5\frac{v'(x)}{v(x)} = 1 - 5 \times \frac{1}{x+2} = \frac{x+2-5}{x+2} = \frac{x-3}{x+2}$$

Le dénominateur est clairement strictement positif sur $[0; 11]$ donc $f'(x)$ est du signe de $x - 3$.

x	0		3		11
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$10 - 5\ln(2)$	$\searrow$	$13 - 5\ln(5)$	$\nearrow$	$21 - 5\ln(13)$

3)

a. L'année 2005 correspond à $x = 7$.

$f(7) = 17 - 5\ln(9) \approx 6{,}01$

Avec cet ajustement, le prix d'une tonne de matière première en 2005 serait de 6,01 milliers d'euros environ.

b. On doit résoudre $f(x) = 6{,}48$:

Graphiquement ou à l'aide du tableau de valeurs de la question 2)a., on trouve $x \approx 8$ ce qui correspond à l'année 2006. Donc, le prix d'une tonne de matière première retrouvera sa valeur de 1998 aux environs de 2006.