

Devoir maison n°7

Exercice 1

1) Calculer les limites suivantes (ne pas oublier de vérifier graphiquement !!) :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln\left(\frac{x}{2x+3}\right) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x}{2x+3}\right) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} x - 1 - 2 \ln(x) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 - 2 \ln(x)$$

2) On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x + \frac{\ln(x+1)}{x}$.

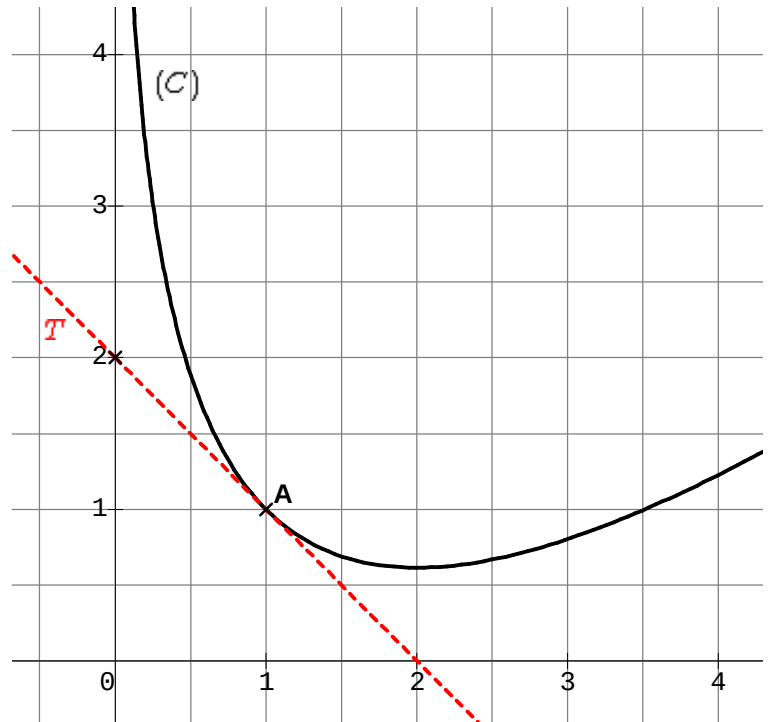
- En remarquant que $f(x) = x + \frac{x+1}{x} \times \frac{\ln(x+1)}{x+1}$, calculer la limite de f en $+\infty$.
- Démontrer que la droite D d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à la courbe de f .
- Calculer la limite de f en 0.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ dont on donne la représentation graphique (C) dans le repère ci-contre.

On admet que :

- le point A de coordonnées $(1; 1)$ appartient à la courbe (C) ;
- la tangente (T) en A à la courbe (C) passe par le point de coordonnées $(2; 0)$;
- la courbe (C) admet une tangente horizontale au point d'abscisse 2 ;
- l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe de la fonction f .



Partie A

1) Donner, par lecture graphique ou en utilisant les données de l'énoncé, les valeurs de $f(1)$, $f'(1)$ et $f'(2)$ où f' est la fonction dérivée de f sur $]0; +\infty[$.

2) On admet que l'expression de f sur $]0; +\infty[$ est : $f(x) = ax + b + c \ln(x)$ où a, b et c sont des nombres réels.

- Calculer $f'(x)$ en fonction de x et de a, b et c .
- Démontrer que les réels a, b et c vérifient le système
$$\begin{cases} a + b = 1 \\ a + c = -1 \\ a + \frac{c}{2} = 0 \end{cases}$$
- Déduire de la question précédente les valeurs de a, b et c puis l'expression de $f(x)$.

Partie B

Dans cette partie, on admet que la fonction f représentée ci-dessus est définie pour tout réel x appartenant à $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x - 2 \ln(x)$.

- Justifier que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe représentative de f .
- Calculer la limite de f en $+\infty$.
- Calculer la dérivée f' de la fonction f .
 - En déduire le tableau de variations de la fonction f .
- Calculer l'équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 1.
- On considère la fonction $g: x \mapsto x - \ln(x) - 1$.
 - Etudier les variations de g sur $]0; +\infty[$ et en déduire le signe de g .
 - En déduire la position relative de T et de la courbe de f .