# *Correction devoir maison n°7*

**Exercice 1**

1)

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2x+3}=\dfrac{0}{2\times 0+3}=0$ et $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x)=-\infty$ donc, par composition $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(\dfrac{x}{2x+3}\right)=-\infty}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2x}=\dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\ln(x)=\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$ donc, par composition $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x}{2x+3}\right)=\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)}$

$\lim\limits_{x\to 0}x-1=-1$ et $\lim\limits_{x\to 0}-2\ln(x)=+\infty$ donc, par addition $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}x-1-2\ln(x)=+\infty}$

$x-1-2\ln(x)=x\left[\dfrac{x-1-2\ln(x)}{x}\right]=x\left[1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2\ln(x)}{x}\right]$

$\lim\limits_{x\to+\infty}1=1$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{1}{x}=0$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty}-2\dfrac{\ln(x)}{x}=0$ d'après le cours donc $\lim\limits_{x\to+\infty}1-\dfrac{1}{x}-2\dfrac{\ln(x)}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ et par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}x-1-2\ln(x)=+\infty}$

2) $f(x)=x+\frac{\ln(x+1)}{x}$

a. On a évidemment $f(x)=x+\frac{x+1}{x}\times\frac{\ln(x+1)}{x+1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x}=1$ ;

$\lim\limits_{x\to+\infty}x+1=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$ donc par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=0$

Par produit puis par addition, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty}$

b. Pour démontrer que $D$ d'équation $y=x$ est une asymptote oblique à la courbe de $f$, on doit montrer que la limite de $f(x)-x$ en $+\infty$ est égale à 0. Or :

$f(x)-x=\frac{x+1}{x}\times\frac{\ln(x+1)}{x+1}$ et le calcul de cette limite à la question précédente donne bien 0. Donc $D$ est bien une asymptote oblique à la courbe de $f$ en $+\infty$.

c.

$\lim\limits_{x\to 0}x=0$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=1$ d'après le cours donc par addition $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1}$

**Exercice 2**

***Partie A***

1) $(C)$ passe par le point $A(1;1)$ donc $\boxed{f(1)=1}$

La tangente à $(C)$ au point $A$ d'abscisse 1 passe aussi par $B(0;2)$. Le coefficient directeur de la tangente à $(C)$ en $A$ est donc d'une part $f'(1)$ mais en calculant le coefficient directeur de $(AB)$, on trouve $\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{2-1}{0-1}=-1$.

Donc $\boxed{f'(1)=-1}$

Au point d'abscisse 2, la courbe $(C)$ a une tangente horizontale donc de coefficient directeur égal à 0 donc $\boxed{f'(2)=0}$

2) $f(x)=ax+b+c\ln(x)$

a. $\boxed{f'(x)=a+\frac{c}{x}}$

b. $\begin{cases}f(1)=1\\ f'(1)=-1\\ f'(2)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b+c\ln(1)=1\\ a+\frac{c}{1}=-1\\ a+\frac{c}{2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=1\\ a+c=-1\\ c=-2a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=1-a\\ -a=-1\\ c=-2a\end{cases}\Leftrightarrow\boxed{\begin{cases}a=1\\ b=0\\ c=-2\end{cases}}$

Donc $\boxed{f(x)=x-2\ln(x)}$

***Partie B***

1) Pour démontrer que l'axe des ordonnées est une asymptote à la courbe de $f$, cela signifie que la droite d'équation $x=0$ est une asymptote verticale à $(C)$ donc que la limite de $f$ en 0 est égale à l'infini. Vérifions cela :

$\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} -2\ln(x) = +\infty$ donc par addition $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty}$
Donc la droite d'équation $x = 0$, c'est-à-dire l'axe des ordonnées est bien une asymptote à $(C)$.

2) Pour la limite en $+\infty$, nous avons une forme indéterminée. Pour calculer la limite, on met donc le terme le plus important en facteur, c'est-à-dire $x$ :

$$f(x) = x - 2\ln(x) = x\left[\frac{x - 2\ln(x)}{x}\right] = x\left[1 - \frac{2\ln(x)}{x}\right]$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{2\ln(x)}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{2\ln(x)}{x} = 1$ et par produit $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

3)

a. $\boxed{f'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x}}$

b. Sur $]0;+\infty[$, le dénominateur est bien sûr positif donc $f'$ est du signe de $x - 2$.

| $x$ | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| Variations de $f$ | $+\infty$ | ↘ | $2 - 2\ln(2)$ | ↗ | $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ |

4) La tangente à la courbe de $f$ au point d'abscisse 1 a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.
Ici : $f'(1) = \frac{1-2}{1} = -1$ et $f(1) = 1 - 2\ln(1) = 1$ donc l'équation est $y = -(x-1) + 1$ ou encore $\boxed{y = -x + 2}$

5) $g : x \mapsto x - \ln(x) - 1$ :

a. $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$ donc $g'$ est du signe de $x - 1$.

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| Variations de $g$ | | ↘ | $0$ | ↗ | |

On voit donc que $g$ est positive sur $]0;+\infty[$.

b. Pour étudier la position relative de $T$ et de la courbe de $f$, on doit étudier le signe de $f(x)$—$x + 2$. Or, $f(x) - (-x + 2) = x - 2\ln(x) + x - 2 = 2x - 2\ln(x) - 2 = 2g(x)$
D'après la question précédente, $g$ est positive donc $f(x) - (-x + 2)$ est positif et $(C)$ est au dessus de $T$.