Correction devoir surveillé n°1

Exercice 1

f_1 est un polynôme donc est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
f_1 est de la forme u^n où $u(x) = 3x^2 - 5x - 2$ et $n = 4$ donc $u'(x) = 6x - 5$.
La dérivée de u^n est $u' \times nu^{n-1}$ d'où : $\boxed{f_1'(x) = (6x-5) \times 4 \times (3x^2 - 5x - 2)^3}$

f_2 est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = 7x - 4$ et $v = x^2 + 1$ donc $u'(x) = 7$ et $v'(x) = 2x$.
Comme v ne s'annule pas, f_2 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f_2'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{\left(v(x)\right)^2} = \frac{7(x^2+1) - (7x-4) \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{7x^2 + 7 - 14x^2 + 8x}{(x^2+1)^2}$$

$$\boxed{f_2'(x) = \frac{-7x^2 + 8x + 7}{(x^2+1)^2}}$$

Exercice 2

Résolution de la première inéquation :
Les valeurs interdites sont 0 et -1 car il faut que les dénominateurs soient non nuls (donc on résout les équations $x \neq 0$ et $x + 1 \neq 0$ pour trouver les valeurs interdites) et donc on résout l'inéquation sur $\mathbb{R} - \{-1; 0\}$.

$$\frac{3}{x} < \frac{5}{x+1} - 1 \Leftrightarrow \frac{3(x+1)}{x(x+1)} - \frac{5x}{x(x+1)} + \frac{x(x+1)}{x(x+1)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x + 3 - 5x + x^2 + x}{x(x+1)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - x + 3}{x(x+1)} < 0$$

Signe de $x^2 - x + 3$: $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 3 = -11 < 0$ donc le signe de $x^2 - x + 3$ est strictement du signe de $a = 1$.
On peut maintenant construire le tableau de signe de l'expression :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
Signe de $x^2 - x + 3$		$+$		$+$		$+$	
Signe de $x(x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Signe de $\frac{x^2-x+3}{x(x+1)}$		$+$	$\|$	$-$	$\|$	$+$	

On a donc $\boxed{S =]-1; 0[}$

Résolution de la seconde inéquation :
Pour $-6x^2 - x + 2$: $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-6) \times 2 = 1 + 48 = 49$ donc $-6x^2 - x + 2$ est du signe de $a = -6$ sauf entre les racines : $x_1 = \frac{1+7}{-12} = -\frac{2}{3}$ et $x_2 = \frac{1-7}{-12} = \frac{1}{2}$.
On a donc : $\boxed{S = \left[-\frac{2}{3}; \frac{1}{2}\right]}$

Exercice 3

1) f est définie quand $2x - 4 \geq 0$ (on peut alors calculer la racine carrée), autrement dit $\boxed{D_f = [2; +\infty[}$
2) f est de la forme uv avec $u(x) = 3x - 12$ et $v(x) = \sqrt{2x-4}$.

Donc $u'(x) = 3$ et pour calculer v', il faut utiliser le fait que v soit de la forme $\sqrt{w}$ avec $w(x) = 2x - 4$ et donc $v'(x) = w'(x) \times \frac{1}{2\sqrt{w(x)}} = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{2x-4}} = \frac{1}{\sqrt{2x-4}}$.

$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 3\sqrt{2x-4} + (3x-12) \times \dfrac{1}{\sqrt{2x-4}} = \dfrac{3\left(\sqrt{2x-4}\right)^2 + 3x - 12}{\sqrt{2x-4}}$

$f'(x) = \dfrac{3(2x-4) + 3x - 12}{\sqrt{2x-4}} = \boxed{\dfrac{9x-24}{\sqrt{2x-4}}}$

On trouve bien l'expression donnée dans l'énoncé.

3) Le dénominateur de $f'(x)$ est strictement positif sur $]2; +\infty[$ donc $f'(x)$ est du signe de $9x - 24$ qui s'annule en $\frac{8}{3}$.

x	2		$\frac{8}{3}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f	‖	↘	$-\frac{8\sqrt{3}}{3}$	↗	

$f\left(\frac{8}{3}\right) = \left(3 \times \frac{8}{3} - 12\right)\sqrt{2 \times \frac{8}{3} - 4} = -4\sqrt{\frac{4}{3}} = -\frac{8}{\sqrt{3}} = -\frac{8\sqrt{3}}{3}$

Exercice 4

1) Par lecture graphique :

a. $\boxed{u(1) = 1}$ et $\boxed{u(3) = 2}$

b. Tableau de signe de u :

x	-3		-2		4		5
Signe de $u(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

c. On lit le coefficient directeur des tangentes aux points d'abscisse 1 et 3 : $\boxed{u'(1) = 3}$ et $\boxed{u'(3) = -2}$

2) $f = v \circ u$

a. On peut calculer $f(x)$ si $x \in D_u = [-3; 5]$ et si $u(x) \in D_v = [0; 5]$.

Or, les images de u ne sont positives que pour $x \in [-2; 4]$.

$\boxed{\text{Donc } f \text{ est définie sur } [-2; 4].}$

b. Sur $[3; 4]$, u est décroissante. Ses images appartiennent à $[0; 2]$. Sur $[0; 2]$, v est décroissante donc par composition, $\boxed{f \text{ est croissante sur } [3; 4].}$

c. $f'(1) = u'(1) \times v'(u(1)) = 3 \times v'(1) = 3 \times (-2) = -6$

$f'(3) = u'(3) \times v'(u(3)) = -2 \times v'(2) = -2 \times 0 = 0$

Au final : $\boxed{f'(1) = -6}$ et $\boxed{f'(3) = 0}$