Correction devoir surveillé n°2

Exercice 1

1) On étudie la limite du numérateur et la limite du dénominateur :

$\lim\limits_{x\to 0} 3x - 1 = 3 \times 0 - 1 = -1$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x^2 + 5x = 0^+$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \sqrt{x^2+5x} = 0^+$ puis par division, $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+5x}} = -\infty}$

2) On doit calculer la limite d'une fonction rationnelle à l'infini, donc elle est égale à la limite du quotient simplifié de ses termes de plus haut degré :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4x-6x^2}{3x^2+2x+1000} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-6x^2}{3x^2} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{6}{3} = \boxed{-2}$$

3) On calcule la limite de chaque facteur et on multiplie :

$\lim\limits_{x\to 2}(x-2)^2 = 0^+$ donc , $\lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{(x-2)^2} - 5\right) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 2} \frac{5x-14}{x} = \frac{5\times 2 - 14}{2} = -\frac{4}{2} = -2$ donc, par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{(x-2)^2} - 5\right)\left(\frac{5x-14}{x}\right) = -\infty}$

Exercice 2

1) La fonction $f = g \circ u$ est définie quand : $x \in D_u$ et $u(x) \in D_g$ ce qui signifie :

$x \in]-\infty; 8[$ et $u(x) \in]0; +\infty[$.

Cette dernière condition correspond, grâce au tableau de variations de u, à $]-\infty; -2[\cup]3; 8[$.

Donc $\boxed{D_f =]-\infty; -2[\cup]3; 8[}$

2) Sur $]-\infty; -2[$: u est décroissante. Ses images appartiennent à $]0; 2[$.

Sur $]0; 2[$, g est décroissante donc f est croissante sur $]-\infty; -2[$.

Sur $]3; 8[$, u est croissante. Ses images appartiennent à $]0; +\infty[$.

Sur $]0; +\infty[$, g est décroissante donc f est décroissante sur $]3; 8[$.

3) On doit déterminer quatre limites : en $-\infty$, en -2, en 3 et en 8 :

$\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = 2$ et $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = 0$ donc, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0}$

$\lim\limits_{x\to-2} u(x) = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$ donc, $\boxed{\lim\limits_{x\to-2} f(x) = +\infty}$

$\lim\limits_{x\to 3} u(x) = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$ donc, $\boxed{\lim\limits_{x\to 3} f(x) = +\infty}$

$\lim\limits_{x\to 8} u(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -5$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 8} f(x) = -5}$

4) Il ne reste plus qu'à dresser le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		-2	3		8
Variations de f	0	↗	$+\infty$	$+\infty$	↘	-5

Exercice 3

1) f possède une valeur interdite. Il faut que $6 - 3x \neq 0$ autrement dit $x \neq 2$ d'où : $\boxed{D_f = \mathbb{R} - \{2\}}$

2) Pour $x \in \mathbb{R} - \{2\}$:

$$\frac{x+2}{3} - \frac{1}{6-3x} = \frac{x+2}{3} - \frac{1}{3(2-x)} = \frac{(x+2)(2-x)-1}{3(2-x)} = \frac{2x - x^2 + 4 - 2x - 1}{6-3x} = \frac{-x^2+3}{6-3x} = f(x)$$

Donc, on a bien $\boxed{f(x) = \frac{x+2}{3} - \frac{1}{6-3x}}$

3) f est une fonction rationnelle. Pour calculer ses limites à l'infini, on peut ne conserver que les termes de plus haut degré :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2}{-3x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{3} = \boxed{-\infty} \text{ et de même, } \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{3} = +\infty}$$

4) Pour la limite à gauche en 2 :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} 3 - x^2 = 3 - 4 = -1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} 6 - 3x = 0^+ \end{array}\right\} \text{donc, par quotient, } \boxed{\lim_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x) = -\infty}$$

On peut justifier le signe de $6 - 3x$ quand x est inférieur à 2 : la droite représentant la fonction $x \mapsto 6 - 3x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ car le coefficient directeur est négatif. Donc, la fonction est positive sur $]-\infty; 2[$ et négative sur $]2; +\infty[$.

De la même manière pour la limite à droite :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} 3 - x^2 = 3 - 4 = -1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} 6 - 3x = 0^- \end{array}\right\} \text{donc, par quotient, } \boxed{\lim_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x) = +\infty}$$

5) f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = 3 - x^2$, $v(x) = 6 - 3x$ donc $u'(x) = -2x$ et $v'(x) = -3$.

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{\left(v(x)\right)^2} = \frac{-2x(6 - 3x) - (-3)(3 - x^2)}{(6 - 3x)^2} = \frac{-12x + 6x^2 + 9 - 3x^2}{(6 - 3x)^2} = \boxed{\frac{3x^2 - 12x + 9}{(6 - 3x)^2}}$$

6) Le dénominateur de f' est bien évidemment positif donc f' est du signe du numérateur. Pour l'étudier, on doit calculer son discriminant : $\Delta = (-12)^2 - 4 \times 3 \times 9 = 36$ donc $3x^2 - 12x + 9$ est du signe de $a = 3$ sauf entre les racines :

$$x_1 = \frac{12 + 6}{2 \times 3} = 3 \text{ et } x_2 = \frac{12 - 6}{2 \times 3} = 1$$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
Signe de f'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f	$-\infty$	↗	$\frac{2}{3}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

$$f(1) = \frac{3 - 1^2}{6 - 3 \times 1} = \frac{2}{3} \text{ et } f(3) = \frac{3 - 3^2}{6 - 3 \times 3} = \frac{-6}{-3} = 2$$