Devoir surveillé n°3

Exercice 1 – 10 points

Le tableau suivant donne la dépense, en millions d'euros, des ménages en produits informatiques de loisirs (matériels, logiciels, réparations…) de 1985 à 1998 d'un pays P :

Année	1985	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
Rang x_i de l'année	0	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Dépense y_i	196	301	318	332	349	361	376	389	400	407

1) Représenter le nuage de point $M_i(x_i; y_i)$ dans un repère orthogonal avec, pour unités graphiques : $1\ cm$ pour un rang en abscisse et $1\ cm$ pour 50 millions d'euros en ordonnées.
Calculer les coordonnées du point moyen G et le place dans le repère.

2) En première approximation, on utilise la droite de Mayer : on note G_1 le point moyen des cinq premiers points et G_2 le point moyen des cinq derniers points.
   a. Calculer les coordonnées de G_1 et G_2 et les placer sur le graphique.
   b. Déterminer par le calcul l'équation de la droite (G_1G_2). Les coefficients seront arrondis à 10^{-3} près. La tracer dans le repère.
   c. En utilisant cet ajustement, calculer une estimation de la dépense des ménages en produits informatiques (arrondie à un million d'euros) en 2005.

3)
   a. Donner à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite D d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis à 10^{-3} près).
Représenter D dans le repère.
   b. En utilisant cet ajustement affine, calculer une estimation de la dépense des ménages en produits informatiques (arrondie à un million d'euros) en 2005.

4) La forme du nuage présentant un ralentissement de la croissance permet d'envisager un ajustement à l'aide d'une parabole. On pose alors : $t_i = (x_i - 21)^2$.
   a. Compléter le tableau suivant :

Année	1985	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
Rang x_i de l'année	0	5	6	7	8	9	10	11	12	13
t_i	441									64
Dépense y_i	196	301	318	332	349	361	376	389	400	407

   b. A l'aide de la calculatrice, déterminer un ajustement affine de y en t par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis à 10^{-3} près).
En déduire que : $y = -0{,}562x^2 + 23{,}604x + 196{,}109$.
   c. En utilisant cet ajustement, calculer une nouvelle estimation de la dépense des ménages en produits informatiques (arrondie à un million d'euros) en 2005.

5) En 2005, les ménages ont dépensés 8,9 milliards d'euros pour leurs loisirs et 5% de ces dépenses concernent les produits informatiques. Avec lequel des trois ajustements l'estimation est-elle la meilleure ?

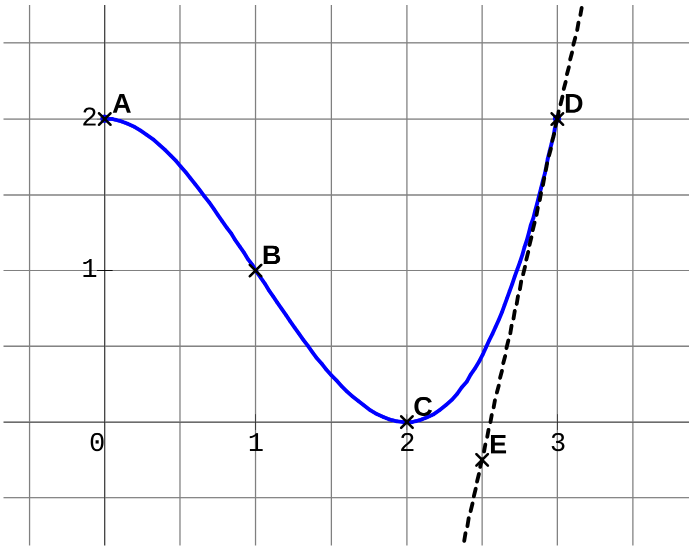
Exercice 2 – 6 points

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{-x^2+2x+2}{x+1}$. On note C_f la courbe représentative de f.

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
2) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3) Montrer que la droite D d'équation $y = -x + 3$ est une asymptote oblique à C_f en $+\infty$ et en $-\infty$.
4) Etudier la position relative de C_f et de D.
5) Démontrer que, pour tout $x \in D_f$, $f(x) = -x + 3 - \frac{1}{x+1}$.
6) Déterminer la limite de f en -1 pour $x > -1$ puis pour $x < -1$. En donner une interprétation graphique.
7) Calculer la dérivée f' de la fonction f.
8) Etudier le signe de f' et en déduire le tableau de variations complet de f.

Exercice 3 – 4 points

On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0; 3]$. Sa courbe représentative (C_f) dans un repère orthogonal est donnée ci-contre.



La courbe (C_f) passe par les points $A(0; 1)$; $B(1; 1)$, $C(2; 0)$ et $D(3; 2)$.
Les tangentes à la courbe aux points A et C sont parallèles à l'axe des abscisses.
La tangente à la courbe au point D passe par le point $E(2{,}5; -0{,}25)$.

1) Par lecture graphique, résoudre l'équation $f(x) = 0$ et donner le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0; 3]$
2) On désigne par g la fonction définie par $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ et (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.
   a. Justifier que l'ensemble de définition de g soit $[0; 2[\cup]2; 3]$.
   b. Calculer $g(0)$, $g(1)$ et $g(3)$.
   c. Déterminer la limite de $g(x)$ quand x tend vers 2, pour $x < 2$ puis pour $x > 2$. Que peut-on en déduire pour la courbe (Γ) ?
   d. Déterminer les variations de g sur $[0; 2[$.
   e. Dresser le tableau de variations de la fonction$g$ sur l'intervalle $[0; 2[\cup]2; 3]$.
   f. Déterminer $f'(0)$; en déduire $g'(0)$.
   g. Déterminer $f'(3)$; en déduire $g'(3)$.