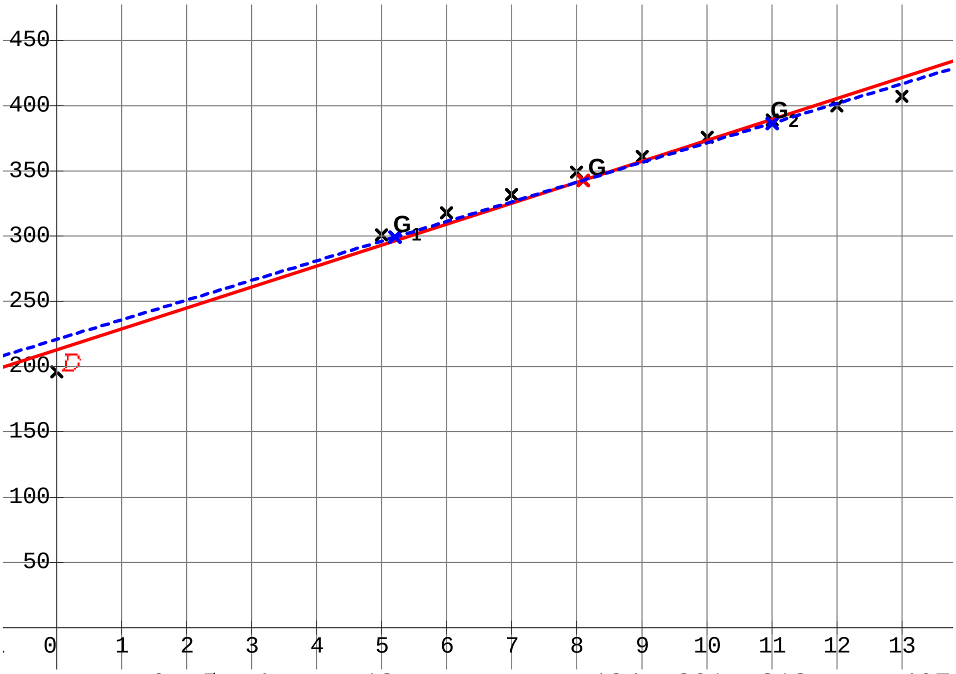
Correction devoir surveillé n°3

Exercice 1

1) Voir le graphique



$$x_G = \frac{0+5+6+\cdots+13}{10} = 8{,}1 \text{ et } y_G = \frac{196+301+318+\cdots+407}{10} = 342{,}9 \text{ donc } \boxed{G(8{,}1;342{,}9)}$$

2) G_1 est le point moyen des cinq premiers points et G_2 des cinq derniers :

a. $x_1 = \frac{0+5+6+7+8}{5} = 5{,}2$ et $y_1 = \frac{196+301+318+332+349}{5} = 299{,}2$ donc $\boxed{G_1(5{,}2;299{,}2)}$

$x_2 = \frac{9+10+11+12+13}{5} = 11$ et $y_2 = \frac{361+376+389+400+407}{5} = 386{,}6$ donc $\boxed{G_2(11;386{,}6)}$

b. Coefficient directeur de (G_1G_2) :

$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{386{,}6-299{,}2}{11-5{,}2} = \frac{87{,}4}{5{,}8} \approx 15{,}069$ L'équation cherchée est donc de la forme $y = 15{,}069x + b$.

Remplaçons x et y par les coordonnées de G_1 pour calculer b : $299{,}2 = 15{,}069 \times 5{,}2 + b$ d'où $b = 220{,}841$.

L'équation de (G_1G_2) est donc $\boxed{y = 15{,}069x + 220{,}481}$

c. L'année 2005 correspond à $x = 20$ donc $y = 15{,}069 \times 20 + 220{,}481 \approx 522$.

En 2005, on peut prévoir, avec cet ajustement, que les dépenses des ménages en produits informatiques seront de 522 millions d'euros environ.

3)

a. Grâce à la calculatrice, on obtient : $y = ax + b$ avec $a \approx 16{,}05$ et $b \approx 212{,}892$, autrement dit $\boxed{y = 16{,}05x + 212{,}892}$

b. L'année 2005 correspond à $x = 20$ donc $y = 16{,}05 \times 20 + 212{,}892 \approx 534$.

En 2005, on peut prévoir, avec cet ajustement, que les dépenses des ménages en produits informatiques seront de 534 millions d'euros environ.

4)

a.

Année	1985	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
Rang x_i de l'année	0	5	6	7	8	9	10	11	12	13
t_i	441	256	225	196	169	144	121	100	81	64
Dépense y_i	196	301	318	332	349	361	376	389	400	407

b. Grâce à la calculatrice, on obtient : $y = at + b$ avec $a \approx -0{,}562$ et $b \approx 443{,}951$, autrement dit $\boxed{y = -0{,}562t + 443{,}951}$

En remplaçant t par $(x-21)^2$ (c'est comme cela qu'il est défini), on a :

$y = -0{,}562(x-21)^2 + 443{,}951 = -0{,}562(x^2 - 42x + 441) + 443{,}951 = \boxed{-0{,}562x^2 + 23{,}604x + 196{,}109}$

c. L'année 2005 correspond à $x = 20$ donc $y = -0{,}562 \times 20^2 + 23{,}604 \times 20 + 196{,}109 \approx 443$

En 2005, on peut prévoir, avec cet ajustement, que les dépenses des ménages en produits informatiques seront de 443 millions d'euros environ.

5) En 2005, les dépenses des ménages pour les loisirs sont de 8,9 milliards d'euros, soit 8900 millions d'euros. 5% sont consacrés aux produits informatiques, ce qui représente 445 millions d'euros car $8900 \times \frac{5}{100} = 445$.

C'est donc le troisième ajustement qui est le plus proche de la réalité.

Exercice 2

1) f est définie si $x+1 \neq 0$ autrement dit si $x \neq -1$ donc $\boxed{D_f = \mathbb{R} - \{-1\}}$

2)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} -x = \boxed{+\infty} \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -x = \boxed{-\infty}$$

3) Pour démontrer que D est une asymptote oblique à C_f, on doit montrer que la limite à l'infini deu $f(x) - (-x+3)$ est égale à 0. Or pour $x \in D_f$:

$$f(x) - -x + 3 = \frac{-x^2+2x+2}{x+1} + \frac{(x-3)(x+1)}{x+1} = \frac{-x^2+2x+2+x^2+x-3x-3}{x+1} = -\frac{1}{x+1}$$

$$\lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{x+1} = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x+1} = 0$$

Donc la droite D d'équation $y = -x+3$ est une asymptote oblique de C_f en $+\infty$ et en $-\infty$.

4) Pour étudier les positions relatives de C_f et D, on doit étudier le signe de $f(x) - (-x+3)$, autrement dit le signe de $-\frac{1}{x+1}$ qui est clairement le signe contraire de $x+1$.

Sur $]-\infty; -1[$, $x+1 < 0$ donc $-\frac{1}{x+1} > 0$ et donc C_f est au dessus de D.

Sur $]-1; +\infty[$, $x+1 > 0$ donc $-\frac{1}{x+1} < 0$ et donc C_f est au dessous de D.

5) Pour $x \in D_f$, on a déjà montré que $f(x) - (-x+3) = -\frac{1}{x+1}$ donc $\boxed{f(x) = -x + 3 - \frac{1}{x+1}}$

6) Pour $x > -1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-1} -x+3 = 4 \\ \lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} x+1 = 0^+ \text{ donc } \lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} -\frac{1}{x+1} = -\infty \end{array}\right\} \text{donc, par addition, } \boxed{\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = -\infty}$$

De la même manière, on montre que :

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x) = +\infty}$$

Ceci montre que la courbe de f admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$.

7) f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = -x^2 + 2x + 2$ donc $u'(x) = -2x + 2$ et $v(x) = x + 1$ donc $v'(x) = 1$.

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{(-2x+2)(x+1) - (-x^2+2x+2)}{(x+1)^2} = \frac{-2x^2 - 2x + 2x + 2 + x^2 - 2x - 2}{(x+1)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{-x^2 - 2x}{(x+1)^2}}$$

8) Le dénominateur est clairement positif. $f'(x)$ est donc du signe de $-x^2 - 2x$. Pour déterminer le signe de cette expression, on peut utiliser le discriminant qui est $\Delta = 4$ et utiliser le fait que le signe d'un trinôme est le signe de $a = -1$ sauf entre les deux racines, soit on factorise : $-x^2 - 2x = x(-x-2)$…

Dans tous les cas, on obtient :

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
Variations de f	$+\infty$	↘	6	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	2	↘	$-\infty$

Exercice 3

1) $f(x) = 0$ a une unique solution dans $[0; 3]$: $\boxed{S = \{2\}}$

La courbe de f est au dessus de l'axe des abscisses donc $\boxed{f(x) \geq 0}$

2)

a. $\frac{1}{f}$ est définie si $f(x) \neq 0$, donc $x \neq 2$. g est donc définie sur $\boxed{[0; 2[\cup]2; 3]}$

b. $g(0) = \frac{1}{f(0)} = \boxed{\frac{1}{2}}$; $g(1) = \frac{1}{f(1)} = \frac{1}{1} = \boxed{1}$; $g(3) = \frac{1}{f(3)} = \boxed{\frac{1}{2}}$

c. Pour $x < 2$:

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} f(x) = 0^+$ donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} g(x) = +\infty}$

Pour $x > 2$:

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} f(x) = 0^+$ donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} g(x) = +\infty}$

Ceci signifie que la courbe Γ a une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

d. Sur $[0; 2[$, f est décroissante et ses images appartiennent à $]0; 2]$. Sur $]0; 2]$, la fonction inverse est décroissante donc g est croissante sur $[0; 2[$.

e. Et voici le tableau de variations de g :

x	0		2		3
Variations de g	$\frac{1}{2}$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{1}{2}$

f. D'après l'énoncé, la tangente à C_f au point A d'abscisse 0 a pour coefficient directeur 0 (elle est parallèle à l'axe des abscisses. Donc $\boxed{f'(0) = 0}$

$g'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$ donc $g'(0) = -\frac{0}{2^2}$ ou encore $\boxed{g'(0) = 0}$

g. D'après l'énoncé, la tangente à C_f au point D d'abscisse 3 passe aussi par E. Son coefficient directeur est :

$\frac{y_E - y_D}{x_E - x_D} = \frac{-0{,}25 - 2}{2{,}5 - 3} = -\frac{2{,}25}{-0{,}5} = 4{,}5$ donc $\boxed{f'(3) = 4{,}5}$

$g'(3) = -\frac{f'(3)}{f(3)^2} = -\frac{4{,}5}{2^2}$ ou encore $\boxed{g'(3) = -1{,}125}$