Correction devoir surveillé n°4 bis

Exercice 1

1) $\ln(2x-1)+\ln(x+3)=\ln(12x-9) \Leftrightarrow \begin{cases} \ln\big((2x-1)(x+3)\big)=\ln(12x-9) \\ 2x-1>0 \\ x+3>0 \\ 12x-9>0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x-1)(x+3)=12x-9 \\ x>\dfrac{1}{2} \\ x>-3 \\ x>\dfrac{9}{12} \end{cases}$

Si on traite séparément la première équation :

$(2x-1)(x+3)=12x-9 \Leftrightarrow 2x^2+6x-x-3-12x+9=0 \Leftrightarrow 2x^2-7x+6=0$

$\Delta=(-7)^2-4\times 2\times 6=1$ donc il y a deux solutions : $x_1=\frac{7+\sqrt{1}}{2\times 2}=2$ et $x_2=\frac{7-\sqrt{1}}{2\times 2}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

Les deux solutions vérifient les trois conditions donc $\boxed{S=\left\{2;\frac{3}{2}\right\}}$

2) $\ln(3x^2+x)\geq\ln(x)+\ln(4) \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(3x^2+x)\geq\ln(4x) \\ 3x^2+x>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+x\geq 4x \\ 3x^2+x>0 \\ x>0 \end{cases}$

Pour la 1ère inéquation :

$3x^2+x\geq 4x \Leftrightarrow 3x^2-3x\geq 0$

On peut soit factoriser, soit calculer Δ…

$\Delta=(-3)^2-4\times 0\times 3=9$ donc $3x^2-3x$ est du signe de $a=3$ sauf entre les racines $x_1=\frac{3-\sqrt{9}}{6}=0$ et $x_2=\frac{3+\sqrt{9}}{6}=1$ donc $3x^2-3x\geq 0$ pour $x\in\,]-\infty;0[\,\cup\,]1;+\infty[$.

Pour la 2ème inéquation : $3x^2+x\geq 0 \Leftrightarrow x(3x+1)\geq 0$

On réalise un tableau de signe ou on calcule Δ et on trouve que $x\in\left]-\infty;-\frac{1}{3}\right[\cup\,]0;+\infty[$.

Pour la troisième inéquation : il faut que $x>0$.

On cherche maintenant les valeurs de x qui vérifient les trois conditions en même temps et on obtient :

$\boxed{S=\,]1;+\infty[}$

3)

a. On veut résoudre $6x^2-11x+3=0$: $\Delta=(-11)^2-4\times 6\times 3=49$

Donc l'équation a deux solutions : $x_1=\frac{11+\sqrt{49}}{2\times 6}=\frac{3}{2}$ et $x_2=\frac{11-\sqrt{49}}{2\times 6}=\frac{1}{3}$ d'où $\boxed{S=\left\{\frac{3}{2};\frac{1}{3}\right\}}$

b. On pose $X=\ln(x)$ donc l'équation $6(\ln(x))^2-11\ln(x)+3=0$ devient $6X^2-11X+3=0$ que nous venons de résoudre donc : $X=\frac{1}{3}$ ou $X=\frac{3}{2}$ ce qui donne $\ln(x)=\frac{1}{3}$ ou $\ln(x)=\frac{3}{2}$

D'où $x=e^{\frac{1}{3}}$ ou $x=e^{\frac{3}{2}}$ et finalement $\boxed{S=\left\{e^{\frac{1}{3}};e^{\frac{3}{2}}\right\}}$

c. $\ln(3x-4)+\ln(2x-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \ln\big((3x-4)(2x-1)\big)=\ln(1) \\ 3x-4>0 \\ 2x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x-4)(2x-1)=1 \\ x>\frac{4}{3} \\ x>\frac{1}{2} \end{cases}$

Pour l'équation : $(3x-4)(2x-1)=1 \Leftrightarrow 6x^2-3x-8x+4-1=0 \Leftrightarrow 6x^2-11x+3=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$ ou $x=\frac{3}{2}$

Parmi ces solutions, seule $\frac{3}{2}$ vérifie les deux autres conditions donc $\boxed{S=\left\{\frac{3}{2}\right\}}$

Exercice 2

1) f est de la forme $u \times v - 3v + 4$ avec $u: x \mapsto x$ et donc $u'(x) = 1$ et $v(x) = \ln(x)$ donc $v'(x) = \frac{1}{x}$

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) - 3v'(x) = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 3 \times \frac{1}{x} = \boxed{\ln(x) + 1 - \frac{3}{x}}$$

2) g est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u: x \mapsto \ln(x)$ et donc $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v: x \mapsto 2x - 1$ et donc $v'(x) = 2$.

$$g'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{\left(v(x)\right)^2} = \frac{\frac{1}{x} \times (2x-1) - 2\ln(x)}{(2x-1)^2} = \boxed{\frac{2x - 1 - 2x\ln(x)}{x(2x-1)^2}}$$

3) h est de la forme $\ln(u)$ avec $u: x \mapsto \frac{2x+1}{x-1}$ donc de la forme $\frac{U}{V}$ avec $U: x \mapsto 2x + 1$ et $V: x \mapsto x - 1$ donc

$$u'(x) = \frac{U'(x)V(x) - U(x)V'(x)}{\left(V(x)\right)^2} = \frac{2(x-1) - (2x+1)}{(x-1)^2} = \frac{2x - x - 2x - 1}{(x-1)^2} = -\frac{3}{(x-1)^2}$$

Et donc : $h'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = -\frac{\frac{3}{(x-1)^2}}{\frac{2x+1}{x-1}} = -\frac{3}{(x-1)^2} \times \frac{x-1}{2x+1} = \boxed{-\frac{3}{(x-1)(2x+1)}}$

Exercice 3

1) f est définie si $2x + 4 > 0$ et $2x > 0$ autrement dit : $x > -2$ et $x > 0$ d'où $\boxed{D_f =]0; +\infty[}$

2)

$\lim\limits_{x \to 0} 3x + 4 = 4$; $\lim\limits_{x \to 0} \ln(2x+4) = \ln(4)$; $\lim\limits_{x \to 0} \ln(2x) = -\infty$ donc, par addition $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty}$

Graphiquement, cela signifie que la droite d'équation $x = 0$, donc $\boxed{\text{l'axe des ordonnées est une asymptote oblique à } \mathcal{C}_f}$.

3) Pour $x > 0$:

$$f(x) = 3x + 4 - \ln(2x+4) + \ln(2x) = 3x + 4 + \ln\left(\frac{2x}{2x+4}\right)$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x}{2x+4} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x}{2x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1} \ln(x) = \ln(1) = 0$ donc, par composition, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{2x}{2x+4}\right) = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} 3x + 4 = +\infty$ donc, par addition, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

4) Pour $x > 0$:

$f(x) - (3x+4) = \ln\left(\frac{2x}{2x+4}\right)$ et d'après la question précédente,

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{2x}{2x+4}\right) = 0$

$\boxed{\text{Donc la droite } D \text{ d'équation } y = 3x + 4 \text{ est une asymptote oblique à la courbe de } f}$.

5) Pour $x > 0$: on doit étudier le signe de $f(x) - (3x+4)$ donc de $\ln\left(\frac{2x}{2x+4}\right)$.

$$\ln\left(\frac{2x}{2x+4}\right) > 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{2x}{2x+4}\right) > \ln(1) \Leftrightarrow \frac{2x}{2x+4} > 1 \Leftrightarrow \frac{2x}{2x+4} - \frac{2x+4}{2x+4} > 0 \Leftrightarrow -\frac{4}{2x+4} > 0$$

Or $2x + 4$ est toujours positif pour $x > 0$ donc $-\frac{4}{2x+4}$ est toujours négatif donc l'inéquation $\ln\left(\frac{2x}{2x+4}\right) > 0$ n'a pas de solution dans $]0; +\infty[$. Ceci montre que $\ln\left(\frac{2x}{2x+4}\right) < 0$ et donc $\boxed{\mathcal{C}_f \text{ est en dessous de } D}$.