Correction devoir surveillé n°4

Exercice 1

1) $A = \ln\left(\frac{9}{16}\right) + \ln\left(\frac{12}{25}\right) - \ln\left(\frac{4}{75}\right) = \ln(9) - \ln(16) + \ln(12) - \ln(25) - \ln(4) + \ln(75)$
$A = \ln(3^2) - \ln(2^4) + \ln(3 \times 2^2) - \ln(25) - \ln(2^2) + \ln(3 \times 25)$
$A = 2\ln(3) - 4\ln(2) + \ln(3) + 2\ln(2) - \ln(25) - 2\ln(2) + \ln(3) + \ln(25)$
$\boxed{A = -4\ln(2) + 4\ln(3)}$
2) $A = \ln\left(\frac{9}{16} \times \frac{12}{25} \times \frac{75}{4}\right) = \ln\left(\frac{9\times3\times4\times3\times25}{4\times4\times25\times4}\right) = \boxed{\ln\left(\frac{81}{16}\right)}$

Exercice 2

1)

$$\ln(x+3) + \ln(x+2) = \ln(x+11) \Leftrightarrow \begin{cases} \ln\big((x+3)(x+2)\big) = \ln(x+11) \\ x+3>0 \\ x+2>0 \\ x+11>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)(x+2) = x+11 \\ x>-3 \\ x>-2 \\ x>-11 \end{cases}$$

Pour l'équation : $(x+3)(x+2) = x+11 \Leftrightarrow x^2+3x+2x+6-x-11=0 \Leftrightarrow x^2+4x-5=0$

$\Delta = b^2-4ac = 4^2 - 4\times1\times(-5) = 36$ donc l'équation a deux solutions : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-6}{2} = -5$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4+6}{2} = 1$

Les trois inéquations se regroupent en une seule : $x > -2$. Finalement :

$\ln(x+3) + \ln(x+2) = \ln(x+11) \Leftrightarrow \begin{cases} x=-5 \text{ ou } x=1 \\ x>-2 \end{cases}$ et donc $\boxed{S = \{1\}}$

2)

$$\ln(3x^2-x) \leq \ln(x) + \ln(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(3x^2-x) \leq \ln(2x) \\ 3x^2-x>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-x \leq 2x \\ 3x^2-x>0 \\ x>0 \end{cases}$$

Résolvons séparément chaque inéquation.

Pour la première : $3x^2-x \leq 2x \Leftrightarrow 3x^2-3x \leq 0 \Leftrightarrow 3x(x-1) \leq 0$ et on réalise un tableau de signe ou alors, on calcule $\Delta = 9$ donc $3x^2-3x$ est du signe de $a=3$ sauf entre les racines $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$.

Finalement, $x \in [0;1]$.

Pour la deuxième inéquation : $3x^2-x>0 \Leftrightarrow x(3x-1)>0$ et on réalise un tableau de signe ou alors, on calcule $\Delta = 1$ et donc $3x^2-x$ est du signe de $a=3$ sauf entre les racines $x_3 = 0$ et $x_4 = \frac{1}{3}$.

Finalement $x \in]-\infty;0[\cup \left]\frac{1}{3};+\infty\right[$

Pour la troisième inéquation, on obtient $x>0$ sans rien faire. En bilan :

$\ln(3x^2-x) \leq \ln(x) + \ln(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0;1] \\ x \in]-\infty;0[\cup \left]\frac{1}{3};+\infty\right[\\ x>0 \end{cases}$ et donc $\boxed{S = \left]\frac{1}{3};1\right]}$

3) $P(x) = -2X^2+7X-6$

a. $P(X) = 0 \Leftrightarrow -2X^2+7X-6=0$

$\Delta = b^2-4ac = 7^2-4\times(-2)\times(-6) = 1$ donc il y a deux solutions : $X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7-1}{-4} = 2$ et $X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7+1}{-4} = \frac{3}{2}$. On trouve donc : $\boxed{S = \left\{2;\frac{3}{2}\right\}}$

b. $-2(\ln(x))^2 + 7\ln(x) - 6 = 0$. On pose $X = \ln(x)$ et on doit résoudre $-2X^2+7X-6=0$. C'est l'équation résolue à la question précédente donc $X=2$ ou $X = \frac{3}{2}$.

On doit donc résoudre $\ln(x) = 2$ ou $\ln(x) = \frac{3}{2}$ ce qui donne $x = e^2$ ou $x = e^{\frac{3}{2}}$. Finalement $\boxed{S = \left\{e^2;e^{\frac{3}{2}}\right\}}$

c. $\ln(-2x+5) + \ln(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \ln\big((-2x+5)(x-1)\big) = \ln(1) \\ -2x+5>0 \\ x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-2x+5)(x-1) = 1 \\ -2x>-5 \\ x>1 \end{cases}$

Pour l'équation :

$(-2x+5)(x-1) = 1 \Leftrightarrow -2x^2+2x+5x-5-1=0 \Leftrightarrow -2x^2+7x-6=0 \Leftrightarrow x=2$ ou $x = \frac{3}{2}$

Pour la première inéquation : $-2x > -5 \Leftrightarrow x < -\frac{5}{-2} \Leftrightarrow x < \frac{5}{2}$

Finalement : $\ln(-2x+5) + \ln(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ ou } x = \frac{3}{2} \\ x < \frac{5}{2} \\ x > 1 \end{cases}$ et donc $\boxed{S = \left\{2; \frac{3}{2}\right\}}$

Exercice 3

Pour la fonction f : f est de la forme $u \times v + w$ avec $u: x \mapsto \ln(x)$ et donc $u'(x) = \frac{1}{x}$; $v: x \mapsto \ln(x)$ et donc $v'(x) = \frac{1}{x}$; $w: x \mapsto 3\ln(x) + 1$ et donc $w'(x) = \frac{3}{x}$.

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) + w'(x) = \frac{1}{x} \times \ln(x) + \ln(x) \times \frac{1}{x} + \frac{3}{x} = \boxed{\frac{2\ln(x) + 3}{x}}$$

Pour la fonction g : g est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u: x \mapsto \ln(x)$ donc $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v: x \mapsto 2x+1$ donc $v'(x) = 2$.

$$g'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{\left(v(x)\right)^2} = \frac{\left(\frac{1}{x}\right) \times (2x+1) - \ln(x) \times 2}{(2x+1)^2} = \boxed{\frac{2x + 1 - 2x\ln(x)}{x(2x+1)^2}}$$

Pour la fonction h : h est de la forme $\ln(u)$ avec $u: x \mapsto \frac{2x-1}{x+1}$ de la forme $\frac{U}{V}$ avec $U: x \mapsto 2x - 1$ donc $U'(x) = 2$ et $V: x \mapsto x + 1$ donc $V'(x) = 1$. On a donc

$$u'(x) = \frac{U'(x)V(x) - U(x)V'(x)}{\left(V(x)\right)^2} = \frac{2(x+1) - (2x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2x + 2 - 2x + 1}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2}$$

$$h'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{3}{(x+1)^2} \times \frac{x+1}{2x-1} = \boxed{\frac{3}{(x+1)(2x-1)}}$$

Exercice 4

1) f est définie pour $x > 0$ et $x - 2 > 0$ autrement dit $x > 0$ et $x > 2$. Donc $\boxed{D_f =]2; +\infty[}$

2)

$\lim\limits_{x \to 2} 5x - 2 - \ln(x) = 5 \times 2 - 2 - \ln(2) = 8 - \ln(2)$

$\lim\limits_{x \to 2} x - 2 = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ donc par composition, $\lim\limits_{x \to 2} \ln(x-2) = -\infty$

Finalement $\boxed{\lim_{x \to 2} f(x) = -\infty}$ Graphiquement, la droite d'équation $x = 2$ est une asymptote verticale à la courbe de f.

3) Pour $x \in D_f$:

$$f(x) = 5x - 2 - \ln(x) + \ln(x-2) = 5x - 2 + \ln\left(\frac{x-2}{x}\right)$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} 5x - 2 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x-2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1} \ln(x) = \ln(1) = 0$ donc, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x-2}{x}\right) = 0$

Par addition $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

4) Pour démontrer que la droite d'équation $y = 5x - 2$ est une asymptote oblique de C_f, on doit démontrer que la limite de $f(x) - (5x - 2)$ est égale à 0 en $+\infty$. Or,

$f(x) - (5x - 2) = -\ln(x) + \ln(x-2) = \ln\left(\frac{x-2}{x}\right)$ et d'après les calculs précédents, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x-2}{2}\right) = 0$

$\boxed{\text{Donc } D \text{ est bien une asymptote oblique à la courbe de } f.}$

5) Pour étudier la position relative de D et de la courbe de f, on doit étudier le signe de $f(x) - (5x - 2)$, c'est-à-dire le signe de $\ln\left(\frac{x-2}{x}\right)$. Résolvons donc $\ln\left(\frac{x-2}{x}\right) > 0$ dans $D_f =]2; +\infty[$:

$\ln\left(\frac{x-2}{x}\right) > 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x-2}{x}\right) > \ln(1) \Leftrightarrow \frac{x-2}{x} > 1 \Leftrightarrow x - 2 > x$ car $x > 2$ donc $x > 0$ ...

$\Leftrightarrow -2 > 0$ ce qui est impossible donc cette inéquation n'a pas de solutions et donc $\ln\left(\frac{x-2}{x}\right) < 0$

Ceci montre que $f(x) - (5x - 2) < 0$ ou encore que $f(x) < 5x - 2$.

$\boxed{\text{La courbe de } f \text{ est donc au dessous de } D.}$

Exercice 5

Partie A

A l'aide de la calculatrice, on obtient $y = ax + b$ avec $a \approx 0{,}31$ et $b \approx 9{,}9$ donc $\boxed{y = 0{,}31x + 9{,}9}$

Partie B

1)

a. Le nombre de nouveaux résidants est donné par la fonction f. On doit donc résoudre $f(x) \geq 14$ (l'unité est la centaine de résidants).

$f(x) \geq 14 \Leftrightarrow 0{,}3x + 10 \geq 14 \Leftrightarrow 0{,}3x \geq 4 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{4}{0{,}3} \Rightarrow x \geq 13{,}4$

Il faut donc attendre 14 ans, c'est-à-dire en 2014 pour que le nombre de nouveaux résidants dépasse 1400.

b. Le nombre de départs de résidants est donné par la fonction g. On doit donc résoudre $g(x) \geq 14$.

$g(x) \geq 14 \Leftrightarrow \ln(3x+1) + 10 \geq 14 \Leftrightarrow \ln(3x+1) \geq 4 \Leftrightarrow \ln(3x+1) \geq \ln(e^4) \Leftrightarrow 3x + 1 \geq e^4 \Leftrightarrow 3x \geq e^4 - 1$

$\Leftrightarrow x \geq \dfrac{e^4 - 1}{3} \Rightarrow x \geq 17{,}9$

Il faut donc attendre 18 ans, c'est-à-dire 2018 pour que le nombre de départs de résidants dépasse 1400.

2) $d = g - f$

a. Concrètement, d représente le nombre de départs moins le nombre d'arrivées de résidants, autrement dit, cela permet de mesurer l'augmentation ou la baisse du nombre de résidants. Si d est positif, il part plus de résidants que ce qu'il en arrive donc la population est en baisse. Si d est négatif, il arrive plus de résidants qu'il n'en part, donc la population augmente.

b. $d(x) = g(x) - f(x) = \ln(3x+1) + 10 - (0{,}3x + 10) = \ln(3x+1) - 0{,}3x$.

d est de la forme $\ln(u) + v$ avec $u : x \mapsto 3x + 1$ et donc $u'(x) = 3$ et $v : x \mapsto -0{,}3x$ donc $v'(x) = -0{,}3$.

$d'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} + v'(x) = \dfrac{3}{3x+1} - 0{,}3 = \dfrac{3 - 0{,}3(3x+1)}{3x+1} = \dfrac{3 - 0{,}9x - 0{,}3}{3x+1} = \boxed{\dfrac{-0{,}9x + 2{,}7}{3x+1}}$

Le dénominateur est positif sur $[0; 20]$ donc d' est du signe de $-0{,}9x + 2{,}7$ qui s'annule en $\frac{2{,}7}{0{,}9} = 3$.

x	0		3		20
Signe de $d'(x)$		$+$	0	$-$	
Variation de d	0	$\nearrow$	$\ln(10) - 0{,}9$	$\searrow$	$\ln(61) - 6$

c. Sur $[3; 20]$, la fonction d est continue car dérivable, elle est strictement décroissante et 0 est bien compris entre $d(3) \approx 1{,}4$ et $d(20) \approx -1{,}9$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $d(x) = 0$ a une unique solution α dans $[3; 20]$. Grâce à la calculatrice, on trouve $\boxed{12 < \alpha < 13}$

3)

a. La plus grande baisse de population a lieu quand d est positif et le plus grand possible donc cela correspond à $x = 3$, autrement dit, en 2003, Sirap enregistre la plus grande baisse de sa population.

$d(3) \approx 1{,}4$ donc la baisse de population est d'environ 140 habitants (l'unité est toujours la centaine de résidants !)

b. La population va augmenter quand le nombre d'arrivées dépassera le nombre de départs, autrement dit quand d sera négative. D'après l'étude précédente, cela arrivera pour $x \geq 13$ donc, à partir de 2013, la population va augmenter.