Devoir surveillé n°6

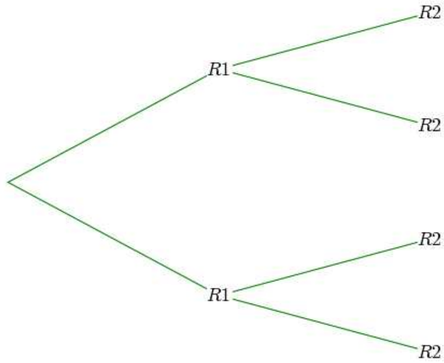
Exercice 1

Pour passer le temps, Chloé et Margaux inventent un jeu avec leur paquet de 32 cartes à jouer et un paquet de bonbons. On rappelle que, dans un jeu de 32 cartes, on trouve quatre couleurs (pique, trèfle, cœur, carreau) et, dans chaque couleur, on a une série de 8 cartes (7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as).
Margaux propose la règle suivante : on tire une carte, on regarde si c'est un roi. Sans remettre la carte dans le paquet, on tire une seconde carte et on regarde si c'est un roi.
Si, sur les deux cartes, on a tiré exactement un roi, on gagne 10 bonbons ;
si on a tiré deux rois, on gagne 20 bonbons ;
sinon, on a perdu !
On note :
R_1 l'évènement « tirer un roi au premier tirage » et $\overline{R_1}$ son évènement contraire,
R_2 l'évènement « tirer un roi au deuxième tirage » et $\overline{R_2}$ son évènement contraire.

1) Justifier les valeurs des probabilités suivantes :

$$p(R_1) = \frac{1}{8} \quad ; \quad p_{R_1}(R_2) = \frac{3}{31} \quad ; \quad p_{\overline{R_1}}(R_2) = \frac{4}{31}$$

2) On traduit le jeu par un arbre pondéré. Compléter l'arbre ci-dessous en inscrivant les probabilités, en écriture fractionnaire sur chaque branche.



Dans ce qui suit, les probabilités seront données sous forme décimale arrondie au millième.

3) Calculer la probabilité de R_2 puis des évènements :
A « tirer un roi au premier tirage et au deuxième tirage » et B « tirer un roi à un seul des deux tirages »

4) Les évènements R_1 et R_2 sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

5) On s'intéresse au nombre X de bonbons gagnés après deux tirages. Compléter le tableau suivant qui donne la loi de probabilité de X.

Nombre de bonbons	0	10	20
Probabilité		0,226	

6) Calculer l'espérance mathématique E de cette loi et la variance.

Exercice 2

A l'issue d'une compétition, des sportifs sont contrôlés par un comité anti-dopage qui doit se prononcer sur leur positivité ou négativité au dopage. Or, d'une part, certains produits dopants restent indétectables au contrôle et d'autre part, certains médicaments ont un effet de dopage inconnu du sportif ; le comité prend alors sa décision avec un risque d'erreur.
Le test dont dispose le comité est fiable à 90%. Cela signifie que la probabilité qu'un sportif dopé soit déclaré positif est 0,9 et que la probabilité qu'un sportif non dopé soit déclaré négatif est 0,9.
On choisit un sportif au hasard et on note : D l'évènement « le sportif est dopé » ; P l'évènement « le test est positif » et E l'évènement « le comité a fait une erreur ».

1) Dans cette question, on suppose qu'il y a 1% de sportifs dopés. On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

a. Construire un arbre pondéré représentant la situation.

b. Calculer la probabilité que le test soit positif.

c. Montrer que $p(E) = \frac{1}{10}$.

d. Sachant que le test est positif, quelle est la probabilité que le sportif se soit réellement dopé ?

e. Sachant que le test est négatif, quelle est la probabilité que le sportif se soit tout de même dopé ?

f. Calculer la probabilité que le sportif soit dopé et que le comité fasse une erreur.

g. Les évènements D et P sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

h. Les évènements D et E sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

2) Dans cette question, on suppose qu'il y a toujours 1% de sportifs dopés. On teste 4 sportifs au hasard de manière indépendante. On donnera les résultats sous forme décimale arrondie au millième.

a. Quelle est la probabilité que le comité se soit trompé exactement une fois ?

b. Quelle est la probabilité que le comité se soit trompé au moins une fois ?

c. On note X le nombre de fois où le comité s'est trompé. Quelles sont les valeurs prises par X ? Déterminer sa loi de probabilité.

d. Calculer l'espérance de X. En donner une interprétation concrète.

e. Combien faudrait-il tester de sportifs de manière indépendante pour que, en moyenne, le comité se trompe une fois ?

3) Dans la réalité, on ne connaît pas exactement la probabilité d'avoir un sportif dopé. On va donc noter p cette probabilité.

a. Calculer la probabilité, en fonction de p, que le test soit positif.

b. Sachant que le test est positif, montrer que la probabilité que le sportif soit effectivement dopé est $\frac{0,9p}{0,8p+0,1}$.

c. Résoudre $\frac{0,9p}{0,8p+0,1} > 0,9$. Interpréter ce résultat.