# *Correction devoir surveillé n°6*

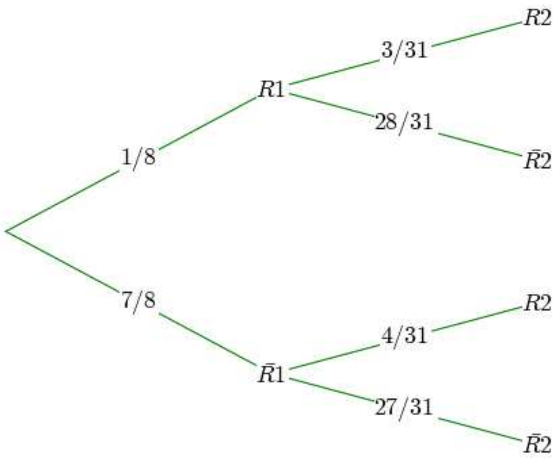
**Exercice 1**

1) Pour le premier tirage, toutes les cartes ont la même chance d'être tirées au sort, autrement dit une probabilité de $\frac{1}{32}$. Il y a quatre rois au total dans le jeu de cartes donc $p(R_1) = \frac{4}{32} = \boxed{\frac{1}{8}}$.

Pour $p_{R_1}(R_2)$ : on sait que la première carte tirée est un roi. Il reste donc trois rois sur les 31 cartes restantes. Nous avons donc une probabilité de $\frac{3}{31}$ de tirer un roi sachant qu'un roi a déjà été tiré. Donc $\boxed{p_{R_1}(R_2) = \frac{3}{31}}$.

De même, si on sait que la première carte n'est pas un roi, alors il reste quatre rois dans le jeu de carte sur les 31 cartes restantes et donc $\boxed{p_{\overline{R_1}}(R_2) = \frac{4}{31}}$

2)




3) $p(R_2) = p(R_1 \cap R_2) + p(\overline{R_1} \cap R_2) = \frac{1}{8} \times \frac{3}{31} + \frac{7}{8} \times \frac{4}{31} = \boxed{\frac{1}{8} = 0{,}125}$

$p(A) = p(R_1 \cap R_2) = p(R_1) \times p_{R_1}(R_2) = \frac{1}{8} \times \frac{3}{31} = \frac{3}{248} \approx \boxed{0{,}012}$

$p(B) = p(R_1 \cap \overline{R_2}) + p(\overline{R_1} \cap R_2) = \frac{1}{8} \times \frac{28}{31} + \frac{7}{8} \times \frac{4}{31} = \frac{56}{248} \approx \boxed{0{,}226}$

4) $p(R_1) = \frac{1}{8}$ ; $p(R_2) = \frac{1}{8}$ ; $p(R_1 \cap R_2) \approx 0{,}012$ et $p(R_1) \times p(R_2) \approx 0{,}016$

Donc $p(R_1) \times p(R_2) \neq p(R_1 \cap R_2)$ et les évènements $R_1$ et $R_2$ ne sont pas indépendants.

5)

| Nombre de bonbons | 0 | 10 | 20 |
|---|---|---|---|
| Probabilité | 0,762 | 0,226 | 0,012 |

Pour le calcul de $p(0 \text{ bonbon})$ : $p(0 \text{ bonbon}) = p(\overline{R_1} \cap \overline{R_2}) = \frac{7}{8} \times \frac{27}{31} = \frac{189}{248} \approx 0{,}762$ ou alors :
$1 - 0{,}012 - 0{,}226 = 0{,}762$ car la somme des probabilités doit être égale à 1.

6) $E = 0 \times 0{,}762 + 10 \times 0{,}226 + 20 \times 0{,}012 = 2{,}26 + 0{,}24 = 2{,}5$

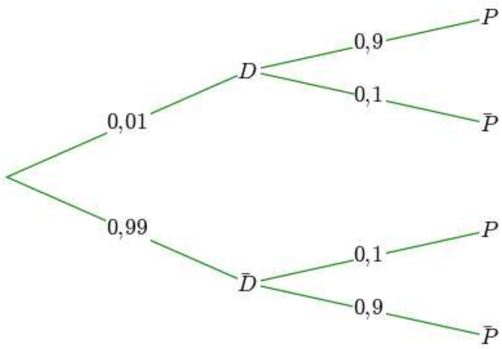
$\boxed{\text{En moyenne, on gagne 2,5 bonbons par partie.}}$

$V = 0^2 \times 0{,}762 + 10^2 \times 0{,}226 + 20^2 \times 0{,}012 - 2{,}5^2 = \boxed{21{,}15}$

**Exercice 2**

1)

a. Voir l'arbre ci-contre




b. $p(P) = p(D \cap P) + p(\overline{D} \cap P)$

$= 0{,}01 \times 0{,}9 + 0{,}99 \times 0{,}1 = 0{,}108 = \boxed{\frac{27}{250}}$

c. $p(E) = p(D \cap \overline{P}) + p(\overline{D} \cap P)$

$= 0{,}01 \times 0{,}1 + 0{,}99 \times 0{,}1 = 0{,}1 = \boxed{\frac{1}{10}}$

d. $p_P(D) = \frac{p(P \cap D)}{p(P)} = \frac{0{,}01 \times 0{,}9}{0{,}108} = \frac{9}{108} = \boxed{\frac{1}{12}}$

e. $p_{\bar{P}}(D) = \frac{p(\bar{P}\cap D)}{p(\bar{P})} = \frac{0{,}01\times 0{,}1}{1-0{,}108} = \frac{0{,}001}{0{,}892} = \boxed{\frac{1}{892}}$

f. $p(D \cap E) = p(D \cap \bar{P}) = 0{,}01 \times 0{,}1 = 0{,}001 = \boxed{\frac{1}{1000}}$

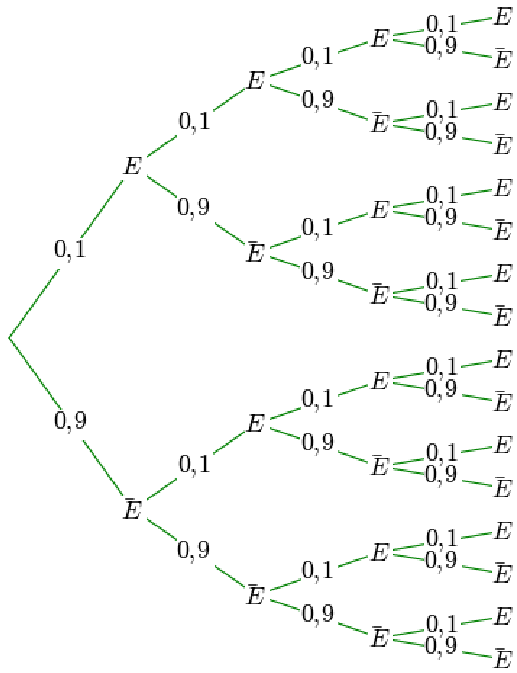
g. $p(D) \times p(P) = \frac{27}{250} \times \frac{1}{100} = \frac{27}{25000} = 0{,}00108$ et $p(D \cap P) = 0{,}01 \times 0{,}9 = 0{,}009$

Les deux résultats sont différents donc les évènements $P$ et $D$ sont indépendants.

h. $p(D) \times p(E) = \frac{1}{100} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{1000}$et $p(D \cap E) = \frac{1}{1000}$

Les deux résultats sont égaux donc les évènements $D$ et $E$ sont indépendants.

2) Nous nous trouvons avec une loi binomiale de paramètres 4 (on choisit quatre sportifs…) et $\frac{1}{10}$ (la probabilité pour chaque sportif que le comité fasse une erreur est de $\frac{1}{10}$). On peut donc représenter les différentes possibilités avec un arbre, représentant le choix des sportifs, tour à tour.




a. $p(1\,fois) = 4 \times 0{,}1 \times 0{,}9^3 \approx \boxed{0{,}292}$

b. $p(\geq 1\,fois) = 1 - p(0\,fois)$

$= 1 - 0{,}9^4 \approx \boxed{0{,}344}$

En effet, le contraire de l'évènement « le comité s'est trompé au moins une fois » est «  le comité ne s'est pas trompé ».

c. $X$ peut prendre les valeurs 0,1,2,3 ou 4 car il peut y avoir de 0 à 4 erreurs sur les quatre sportifs.

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| probabilité | 0,656 | 0,292 | 0,049 | 0,004 | 0,0001 |

d. $E = n \times p = 4 \times \frac{1}{10} = \boxed{0{,}4}$

Concrètement, sur chaque ensemble de 4 sportifs, la moyenne d'erreurs par le comité est de 0,4.

e. L'espérance d'une loi binomiale est égale à $n \times p$ donc ici, à $\frac{n}{10}$ pour $n$ sportifs. $\frac{n}{10} = 1 \Leftrightarrow n = 10.$

Il faut donc tester 10 sportifs pour qu'en moyenne, il y ait une erreur du comité.

3) On reprend l'arbre de la question 1, avec $p$ au lieu de 0,01 pour la probabilité de $D$ et $1-p$ pour la probabilité de $\bar{D}$.

a. $p(P) = p(P \cap D) + p(P \cap \bar{D}) = p \times 0{,}9 + (1-p) \times 0{,}1 = 0{,}9p + 0{,}1 - 0{,}1p = \boxed{0{,}8p + 0{,}1}$

b. $p_P(D) = \frac{p(P\cap D)}{p(P)} = \boxed{\frac{0{,}9p}{0{,}8p+0{,}1}}$

c.

$\frac{0{,}9p}{0{,}8p+0{,}1} > 0{,}9 \Leftrightarrow 0{,}9p > 0{,}9(0{,}8p + 0{,}1)$ car $0{,}8p + 0{,}1 > 0$ donc l'inégalité ne change pas de sens

$\Leftrightarrow 0{,}9p > 0{,}72p + 0{,}09 \Leftrightarrow 0{,}9p - 0{,}72p > 0{,}09 \Leftrightarrow 0{,}18p > 0{,}09 \Leftrightarrow p > \frac{0{,}09}{0{,}18} \Leftrightarrow \boxed{p > 0{,}5}$

Pour que le test soit concluant, c'est-à-dire que le test indique qu'un sportif est dopé avec une probabilité supérieure à 0,9, il faut qu'il y a plus de 50% de sportifs dopés…