Devoir surveillé n°8

Exercice 1

Calculer une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto e^x(e^x - 1) \quad ; \quad f_2 : x \mapsto (2x+1)^3 \quad ; \quad f_3 : x \mapsto \frac{5}{(3-2x)^2}$$

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_1^4 \left(2x - 1 + \frac{1}{x^2}\right) dx \quad ; \quad \int_0^{\ln(2)} (3 - e^{-x}) dx$$

Exercice 3

Calculer la valeur moyenne de $f : x \mapsto \frac{4x}{x^2+9}$ sur l'intervalle $[0; 4]$.

Exercice 4

On considère la fonction $f : x \mapsto (4x - 6)e^{2x}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Déterminer a et b tel que $F : x \mapsto (ax + b)e^{2x}$ soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

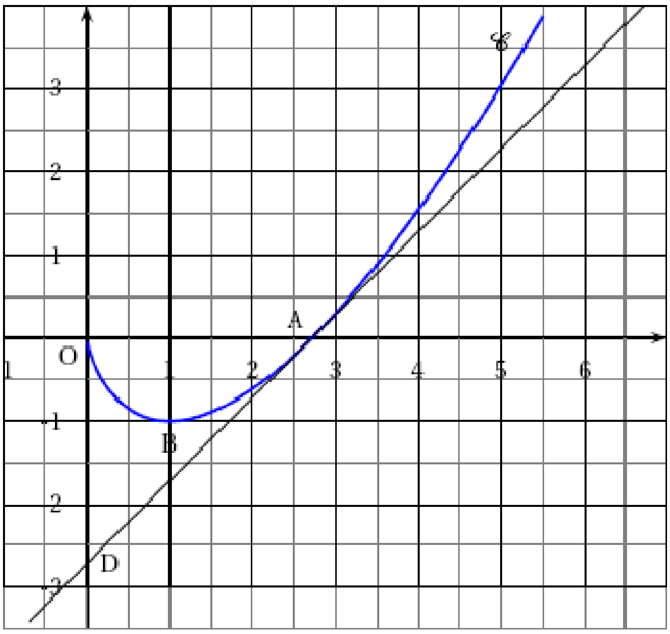
Exercice 5

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Partie A : lectures graphiques

La courbe $\mathcal{C}$ ci-contre représente, dans un repère orthonormé, une fonction f définie et dérivable sur $]0; +\infty[$. On note f' la fonction dérivée de f. La courbe $\mathcal{C}$ passe par les points $A(e; 0)$ et $B(1; -1)$.

La courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse 1 et la tangente au point d'abscisse e passe par le point $D(0; -e)$.



1) Déterminer une équation de la droite (AD).
2) Par lecture graphique et sans justification
   a. Déterminer $f(1)$ et $f'(1)$.
   b. Dresser le tableau de signes de f' sur $[0; 5]$.
   c. Soit F une primitive de f sur $]0; +\infty[$. Déterminer les variations de F sur $]0; 5[$. On ne demande pas les valeurs de compléter le tableau de variations de F avec les images et limites.
   d. Encadrer par deux entiers consécutifs l'aire (en unités d'aire) du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équation $x = 4$ et $x = 5$.

Partie B : Etude de la fonction

La courbe $\mathcal{C}$ de la partie A est la représentation graphique de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = x\,(\ln(x) - 1)$$

1)
   a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   b. Soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = x\ln(x)$. On rappelle que la limite de h en 0 est égale à 0. Déterminer la limite de f en 0.

2)

a. Montrer que, pour tout x de $]0;+\infty[$, on a $f'(x) = \ln(x)$.

b. Etudier le signe de $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$ et en déduire le tableau de variations de f sur $]0;+\infty[$.

3)

a. Démontrer que la fonction H définie sur $]0;+\infty[$ par $H(x) = \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{4}x^2$ est une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction h définie à la question 1b.

b. En déduire une primitive F de f et calculer $\int_1^e f(x)dx$.

c. En déduire l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$. On arrondira le résultat au dixième.