# *Correction devoir surveillé n°8*

**Exercice 1**

Pour $f_1$: on pose $u(x) = e^x - 1$ et alors $u'(x) = e^x$ donc $f_1(x) = u'(x) \times u(x)$ donc une primitive $F_1$ de $f_1$ est :

$$F_1(x) = \frac{1}{2}u(x)^2 = \boxed{\frac{1}{2}(e^x - 1)^2}$$

On pouvait aussi développer $f_1$ : $f_1(x) = e^{2x} - e^x$ et alors on pose $u(x) = 2x$ donc $u'(x) = 2$.

$f_1(x) = \frac{1}{2} \times 2e^{2x} - e^x = \frac{1}{2}u'(x)e^{u(x)} - e^x$ et on trouve $F_1(x) = \frac{1}{2}e^{u(x)} - e^x = \boxed{\frac{1}{2}e^{2x} - e^x}$

Les deux primitives précédentes ne sont pas égales mais différent d'une constante.

Pour $f_2$ : on pose $u(x) = 2x + 1$ et alors $u'(x) = 2$ donc $f_2(x) = \frac{1}{2} \times 2(2x+1)^3 = \frac{1}{2}u'(x)u(x)^3$ donc une primitive $F_2$ de $f_2$ est :

$$F_2(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}u(x)^4 = \boxed{\frac{1}{8}(2x+1)^4}$$

Comme pour $f_1$, on aurait pu développer $f_2$ et prendre une primitive du résultat.

Pour $f_3$ : on pose $u(x) = 3 - 2x$ et donc $u'(x) = -2$ donc $f_3(x) = \frac{5}{-2} \times \frac{-2}{(3-2x)^2} = -\frac{5}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)^2}$ donc une primitive $F_3$ de $f_3$ est :

$$F_3(x) = -\frac{5}{2} \times \left(-\frac{1}{u(x)}\right) = \boxed{\frac{5}{2(3-2x)}}$$

**Exercice 2**

$\int_1^4 \left(2x - 1 + \frac{1}{x^2}\right)dx$ : on pose $f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x^2}$ alors $F(x) = 2 \times \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{x} = x^2 - x - \frac{1}{x}$ est une primitive de $f$ sur $[1; 4]$ donc :

$$\int_1^4 \left(2x - 1 + \frac{1}{x^2}\right)dx = \left[x^2 - x - \frac{1}{x}\right]_1^4 = \left(4^2 - 4 - \frac{1}{4}\right) - \left(1^2 - 1 - \frac{1}{1}\right) = \left(16 - 4 - \frac{1}{4}\right) - (1 - 1 - 1)$$

$$= 12 - \frac{1}{4} + 1 = 13 - \frac{1}{4} = \frac{13 \times 4 - 1}{4} = \boxed{\frac{51}{4}}$$

$\int_0^{\ln(2)}(3 - e^{-x})dx$ : on pose $f(x) = 3 - e^{-x}$ : on pose aussi $u(x) = -x$ et donc $u'(x) = -1$ donc $f(x) = 3 + u'(x)e^{u(x)}$ donc une primitive de $f$ est $F(x) = 3x + e^{u(x)} = 3x + e^{-x}$

$$\int_0^{\ln(2)} (3 - e^{-x})dx = [3x + e^{-x}]_0^{\ln(2)} = \left(3\ln(2) + e^{-\ln(2)}\right) - (3 \times 0 + e^0) = 3\ln(2) + e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} - 1$$

$$= 3\ln(2) + \frac{1}{2} - 1 = \boxed{3\ln(2) - \frac{1}{2}}$$

**Exercice 3**

La valeur moyenne d'une fonction $f$ sur un intervalle $[a; b]$ est égale à $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$. Donc on doit calculer

$$\frac{1}{4-0}\int_0^4 f(x)dx.$$

Pour cela, nous allons calculer une primitive de $f$ sur $[0; 4]$. On pose $u(x) = x^2 + 9$ et donc $u'(x) = 2x$.

$f(x) = \frac{4x}{x^2+9} = 2 \times \frac{2x}{x^2+9} = 2 \times \frac{u'(x)}{u(x)}$ donc une primitive $F$ de $f$ est $F(x) = 2\ln\left(u(x)\right) = 2\ln(x^2 + 9)$.

$$\frac{1}{4}\int_0^4 f(x)dx = \frac{1}{4}[2\ln(x^2+9)]_0^4 = \frac{1}{4}(2\ln(4^2+9) - 2\ln(0^2+9)) = \frac{1}{4}(2\ln(25) - 2\ln(9)) = \frac{1}{2}\ln(25) - \frac{1}{2}\ln(9)$$

$$= \ln\left(\sqrt{25}\right) - \ln\left(\sqrt{9}\right) = \ln(5) - \ln(3) = \boxed{\ln\left(\frac{5}{3}\right)}$$

**Exercice 4**

$F : x \mapsto (ax+b)e^{2x}$ est de la forme $u \times v$ avec $u(x) = ax + b$ et donc $u'(x) = a$ et $v(x) = e^{2x}$ de la forme $e^U$ donc $v'(x) = U'(x)e^{U(x)} = 2e^{2x}$.

$F'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = ae^{2x} + (ax+b) \times 2e^{2x} = (a + 2ax + 2b)e^{2x}$.

$F$ est une primitive de $f$ donc $F' = f$ autrement dit $(2ax + a + 2b)e^{2x} = (4x - 6)e^{2x}$

Par identification : $\begin{cases} 2a = 4 \\ a + 2b = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ 2 + 2b = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \end{cases}$

Donc $\boxed{F(x) = (2x-4)e^{2x}}$

**Exercice 5**

***Partie A***

1) $A(e; 0)$ et $D(0; -e)$ donc le coefficient directeur de la droite $(AD)$ est égal à

$$\frac{y_D - y_A}{x_D - x_A} = \frac{-e-0}{0-e} = \frac{-e}{-e} = 1$$

Donc une équation de $(AD)$ est de la forme $y = x + b$.

Pour déterminer $b$, on utilise le fait que la droite passe par $D$ donc $-e = 0 + b$ et donc $b = -e$.

L'équation de $(AD)$ est donc $\boxed{y = x - e}$

2)

a. $B(1; -1) \in \mathcal{C}$ donc $\boxed{f(1) = -1}$

La tangente en $B$ à $\mathcal{C}$ est parallèle à l'axe des abscisses donc $\boxed{f'(1) = 0}$

b. Quand la fonction $f$ est croissante alors $f'$ est positive. Quand la fonction $f$ est décroissante, alors $f'$ est négative. Donc, on a le tableau de signe suivant :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

c. $F$ est une primitive de $f$ sur $]0; +\infty[$ donc $F' = f$. Pour déterminer les variations de $F$, on étudie le signe de $F'$ donc de $f$.

| $x$ | $0$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $F' = f$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| Variations de $F$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

d. L'aire du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 4$ et $x = 5$ est comprise $\boxed{\text{entre 2 et 3 unités d'aire}}$.

***Partie B***

1)

a. Limite en $+\infty$ :

$\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ ; $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) - 1 = +\infty$ et par produit $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

b. Pour $x > 0$ : $f(x) = x(\ln(x) - 1) = x\ln(x) - x$

$\lim\limits_{x \to 0} x\ln(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} -x = 0$ donc par addition $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0}$

2)

a. $f$ est de la forme $u \times v$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = \ln(x) - 1$ dérivables sur $]0; +\infty[$ avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$ donc $f$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et :

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 1 \times (\ln(x) - 1) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) - 1 + 1 = \boxed{\ln(x)}$$

b. $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > e^0 \Leftrightarrow x > 1$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| Variations de $f$ | $0$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

3)

a. $H(x)=\frac{1}{2}x^2\ln(x)-\frac{1}{4}x^2$ est de la forme $u\times v-w$ avec $u(x)=\frac{1}{2}x^2$ et $v(x)=\ln(x)$ dérivables sur $]0;+\infty[$ avec $u'(x)=\frac{1}{2}\times 2x=x$ et $v'(x)=\frac{1}{x}$ et $w(x)=\frac{1}{4}x^2$ dérivable sur $]0;+\infty[$ avec $w'(x)=\frac{1}{4}\times 2x=\frac{1}{2}x$ :

$$H'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)-w'(x)=x\times\ln(x)+\frac{1}{2}x^2\times\frac{1}{x}-\frac{1}{2}x=x\ln(x)+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x=x\ln(x)=h(x)$$

$\boxed{\text{Donc } H \text{ est bien une primitive de la fonction } h \text{ sur } ]0;+\infty[}$.

b. $f(x)=x(\ln(x)-1)=x\ln(x)-x=h(x)-x$ donc une primitive $F$ de $f$ est

$$F(x)=H(x)-\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}x^2\ln(x)-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x^2=\boxed{\frac{1}{2}x^2\ln(x)-\frac{3}{4}x^2}$$

$$\int_1^e f(x)dx=[F(x)]_1^e=F(e)-F(1)=\frac{1}{2}e^2\ln(e)-\frac{3}{4}e^2-\left(\frac{1}{2}\times 1^2\ln(1)-\frac{3}{4}\times 1^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}e^2-\frac{3}{4}e^2+\frac{3}{4}=\boxed{-\frac{1}{4}e^2+\frac{3}{4}}$$

car $\ln(e)=1$ et $\ln(1)=0$

c. La fonction $f$ est négative sur $[1;e]$ donc l'aire comprise entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisse et les droites d'équation $x=1$ et $x=e$ est égale à $-\int_1^e f(x)dx$ donc $\mathcal{A}=\frac{1}{4}e^2-\frac{3}{4}\approx\boxed{1{,}1\ u.a}$