BAC BLANC mars 2011 - Mathématiques - CORRECTION.

Exercice 1 (5 points) commun à tous les élèves

Partie A (2 points) (E) $y'–2y = xe^x$

1. **1.** (0,25) (F) ñ $y' = 2y$ Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions $f_k : x \mapsto ke^{2x}$ **où k● Ë.**
2. $u(x)=(ax+b)e^x$

   a. (**0,5**) u est dérivable sur Ë en tant que produit d'une fonction affine et de la fonction exponentielle.

$u'(x) = a \times e^x + (ax + b) \times e^x = (ax + a + b) \times e^x$ pour tout x● Ë.

u est solution de (E) ñ $u'(x) - 2u(x) = xe^x$ ñ $(ax + a + b)e^x - 2(ax + b)e^x = xe^x$ ñ $(-ax + a - b)e^x = xe^x$

donc u est solution de (E) **ñ** $-ax + a - b = x$ (car $e^x \neq 0$ pour tout x)

Par identification des deux polynômes on a : u est solution de (E) ñ $\begin{cases} -a = 1 \\ a - b = 0 \end{cases}$ ñ $\begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$

Finalement u est solution de (E) **ñ $u(x)=(-x-1)e^x$ pour tout x● Ë**

b. (**0,5**) v est solution de (E) ñ $v'(x)–2v(x)=xe^x$ Or u est solution de (E) donc $u'(x)–2u(x)=xe^x$

D'où **v est solution de (E)** ñ $v'(x)–2v(x) = u'(x) - 2u(x)$

ñ $v'(x) - u'(x) - 2(v(x) - u(x)) = 0$

ñ $(v - u)'(x) - 2(v - u)(x) = 0$

ñ $v - u$ solution de (F)

c. (**0,5**)

v est solution de (E) ñ $v - u$ solution de (F)

ñ il existe un réel k tel que $(v - u)(x) = ke^{2x}$

ñ il existe un réel k tel que $v(x) = u(x) + ke^{2x}$

ñ il existe un réel k tel que $v(x) = (-x - 1)e^x + ke^{2x}$

L'ensemble des solutions de l'équation (E) sont les fonctions : $g_k : x \mapsto (-x-1)e^x + ke^{2x}$ où k● Ë.

d. (**0,25**) Soit g_k une solution de (E) $g_k(0)=0$ ñ $-e^0+ke^{2\times 0}=0$ ñ $-1+k=0$ ñ $k=1$

L'unique solution de (E) prenant la valeur 0 en 0 est donc la fonction $g_1 : x \mapsto (-x-1)e^x + e^{2x}$

Partie B (1,25 points) $g(x) = 2e^x - x - 2$

1. (**0,5**) $g(x)=u(x)+v(x)$ avec $u(x)=2e^x$ et $v(x)=-x-1$

u est dérivable sur Ë (produit d'une cste et de la fonction exponentielle) et v dérivable sur Ë (fonction affine). Donc g dérivable sur Ë et g'(x)= $2e^x - 1$ pour tout x● Ë. g'(x)>0 ñ $e^x > \frac{1}{2}$ ñ $x > \ln\left(\frac{1}{2}\right)$ (car ln strictement croissante sur Ë+*) ñ $x > -\ln 2$

D'où le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$-\ln 2$	$+\infty$
signe de g '(x)	-	0	+
g	↘	ln2-1	↗

$g(-\ln 2) = 2 \times e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} + \ln 2 - 2 = 1 + \ln 2 - 2 = \ln 2 - 1$ (≈-0,3)

2. a. (**0,25**) $g(0)=2e^0-0-2=2-2=0$ Donc **0 est solution de l'équation $g(x)=0$**

   b. (**0,25**) A l'aide de la calculatrice on a : g(-1,6)≈ 0,004 et g(-1,5) ≈-0,054.

g étant continue et strictement décroissante sur]-õ; -ln2], on a **-1,6≤α≤-1,5**

c. (**0,25**) On en déduit donc le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f(x)$		+	0	-	0	+	

Partie C (1,75 points) Soit f la fonction définie sur Ë par $f(x) = e^{2x} - (x+1)e^{x}$

1. (**0,5**) $f(x) = e^{2x} - xe^{x} - e^{x}$ (1) et $f(x) = \mathbf{e}^{2\mathbf{x}} \times \left(1 - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right)$ (2)

- $Avec\ la\ forme\ (1)$: $\lim_{x\to-\infty} 2x = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0$ Donc par composition $\lim_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$

De plus, $\lim_{x\to-\infty} x\,e^{x} = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0$ donc par somme $\mathbf{\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0}$

- $Avec\ la\ forme\ (2)$: $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ Donc par somme $\lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} = 1$

$\lim_{x\to+\infty} 2x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} e^{X} = +\infty$ Donc par composition $\lim_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$

Finalement par produit $\mathbf{\lim_{x\to+\infty} f(x)} = +\infty$

2. (**0,75**) $f(x)=u(x)-v(x)w(x)$ avec $u(x)=e^{2x}$ $v(x)=x+1$ et $w(x)=e^{x}$

u est dérivable sur Ë en tant que composée d'une fonction linéaire et de la fonction exponentielle.

v et w sont dérivables sur Ë (respectivement fonction affine et exponentielle)

Donc f est dérivable sur Ë et $f'(x) = u'(x) - v'(x)w(x) - v(x)w'(x) = 2\mathbf{e}^{2\mathbf{x}} - e^{x} - (x+1)e^{x} = e^{x} \times \left(2\mathbf{e}^{\mathbf{x}} - 1 - \mathbf{x} - 1\right)$

Soit $f'(x) = e^{x} \times (2e^{x} - x - 2) = e^{x} \times g(x)$ pour tout x ☻Ë.

Or $e^{x} > 0$ pour tout x donc $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe sur Ë. D'où le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
signe de $f'(x)$		+	0	-	0	+	
f	0	↗	$f(\alpha)$	↘	0	↗	$+\infty$

3. (**0,5**) $g(\alpha) = 0$ ñ $2e^{\alpha} - \alpha - 2 = 0$ ñ $e^{\alpha} = \dfrac{\alpha+2}{2}$

Donc $f(\alpha) = \mathbf{e}^{2\alpha} - (\alpha+1)e^{\alpha} = \left(\dfrac{\alpha+2}{2}\right)^2 - (\alpha+1) \times \dfrac{\alpha+2}{2} = \dfrac{\alpha^2 + 4\alpha + 4 - 2(\alpha+1)(\alpha+2)}{4}$

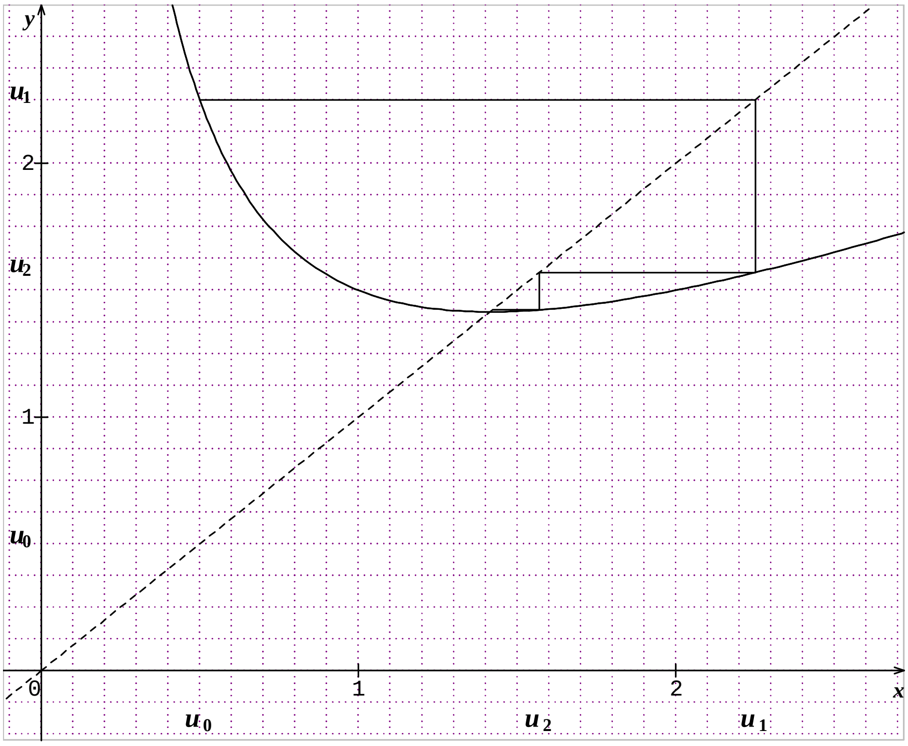
D'où $f(\alpha) = \dfrac{\alpha^2 + 4\alpha + 4 - 2\alpha^2 - 6\alpha - 4}{4} = \dfrac{-\alpha^2 - 2\alpha}{4} = -\,\mathbf{\dfrac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}}$

Exercice 2 (5 points) pour les élèves n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1°) a) f est une fonction rationnelle définie et dérivable sur Ë - { 0} donc sur] 0 ;+ õ [

Pour x > 0 $f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{x^2}\right) = \frac{\frac{1}{2}(x^2-2)}{x^2}$ Or pour x >0 : $x^2 > 0$ et $x^2 - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 2 \Leftrightarrow x \leq -\sqrt{2}$ ou $x \geq \sqrt{2}$ donc :

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
signe de f'		-	0	+	
f		↘		↗	



a)

2°) a) Démontrons par récurrence: $u_n \geq \sqrt{2}$

Vérifions que la propriété est vraie au rang 1 : u_1 = f(u_0) = $\frac{9}{4} \geq \sqrt{2}$. donc la propriété est vraie pour n = 1

Supposons qu'il existe un entier p tel que la propriété soit vraie au rang p c'est-à-dire que : $u_p \geq \sqrt{2}$ (hypothèse à utiliser)

Démontrons qu'alors la propriété est encore vraie au rang suivant p + 1 c'est-à-dire : $u_{p+1} \geq \sqrt{2}$ (conclusion à démontrer)

On a : $u_p \geq \sqrt{2}$. or la fonction f est croissante sur [$\sqrt{2}$; + õ [donc f(u_p) $\geq$ f ($\sqrt{2}$) ce qui donne $u_{p+1} \geq \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\frac{2}{\sqrt{2}}\right)$

Or $\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}$ $donc\ u_{p+1} \geq \sqrt{2}$

Donc la propriété est vraie au rang p +1 Donc la propriété est vraie pour tout entier n ≥ 1

b) f(x) -x = $\frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{x}\right)$ - x = $\frac{1}{2}$ ($\frac{2}{x}$ - x) = $\frac{2-x^2}{2x}$ Or pour x ≥ $\sqrt{2}$: x² ≥ 2 donc 2 – x² ≤ 0 et 2x > 0

donc f(x) – x ≤ 0 pour x ≥ $\sqrt{2}$ et donc f(x) ≤ x pour x ≥ $\sqrt{2}$

c) on sait que pour n ≥ 1 $u_n \geq \sqrt{2}$ donc d'après la question précédente f(u_n) ≤ u_n ce qui donne $u_{n+1} \leq u_n$ donc la suite u est décroissante à partir du rang 1

d) la suite u est donc décroissante eu minorée par $\sqrt{2}$: on sait alors qu'elle converge vers un réel L et comme $u_n \geq \sqrt{2}$ on sait que L ≥ $\sqrt{2}$

3°) on a u_{n+1} = f(u_n) . Or $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1}$ = L .

de plus comme f est continue que] 0 ; + õ [et donc en L , $\lim_{n\to+\infty}$ f(u_n) = f(L)

Enfin comme on a u_{n+1} = f(u_n) , on en déduit que L vérifie l'égalité f(L) = L et donc que L est solution de l'équation f(x) = x

Or pour x >0 : f(x) = x ⇔ x = $\frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{x}\right)$ ⇔ 2x² -x² -2 = 0 ⇔ x² = 2 ⇔ x = $\sqrt{2}$ ou x = -$\sqrt{2}$

Or on a vu que L ≥ $\sqrt{2}$. Donc L = $\sqrt{2}$ et la suite u converge donc vers $\sqrt{2}$

Exercice 2 (5 points) pour les élèves ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A : On considère l'équation (E) : $7x - 6y = 1$ où x et y sont des entiers naturels.

1. (0,5) Le couple (1 ;1) est une solution évidente de (E). On note $x_0 = y_0 = 1$

2. (1) Soit (x ;y) un couple solution de (E) : $7x - 6y = 1$

Le couple (x_0 ;y_0) étant solution de (E) : $7x_0 - 6y_0 = 1$ on a par soustraction : $7(x-x_0) - 6(y-y_0) = 0 \Leftrightarrow 7(x-x_0) = 6(y-y_0)$

Ainsi, ($x-x_0$) étant entier, 7 divise le produit $6(y-y_0)$.

7 et 6 étant premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss 7 divise ($y-y_0$): il existe alors k entier tel que $(y-y_0)= 7k$ soit $y = y_0+7k$ ($k \in Z$)

Ainsi : $7(x-x_0) = 6(7k) \Leftrightarrow x = x_0 + 6k$ ($k\in Z$)

Les couples (x ;y) sont donc de la forme : ($x_0 + 6k$; $y_0+ 7k$) ($k \in Z$)

Réciproquement, $7(x_0 + 6k) - 6(y_0+ 7k) = \ldots = 1$ Ces couples sont bien solutions de l'équation (E).

De plus ce doit être des entiers naturels donc $1 + 6k \geq 0$ et $1 + 7k \geq 0$ soit $k \geq 0$ soit k entier naturel (et non relatif)

Donc S = { (1+ 6k ; 1+ 7k) ; k ∈É}

Partie B :

1. (0,5) On suppose $m \leq 4$.

Si m = 1, (F) s'écrit $7^n - 6 = 1 \Leftrightarrow 7^n = 7$, d'où n = 1. Le couple (1 ; 1) est donc solution.

Si m = 2, (F) s'écrit $7^n - 12 = 1 \Leftrightarrow 7^n = 13$ or 7 ne divise pas 13 : pas de solution

Si m = 3, (F) s'écrit $7^n - 24 = 1 \Leftrightarrow 7^n = 25$ or 7 ne divise pas 25 : pas de solution

Si m = 4, (F) s'écrit $7^n - 48 = 1 \Leftrightarrow 7^n = 49$ d'où n = 2. Le couple (2 ; 4) est donc solution.

Ainsi dans le cas où m ≤ 4 'il y a exactement deux couples solutions : (1 ;1) et (2 ; 4)

2. On suppose maintenant $m \geq 5$: m s'écrit $m = 5 + p$ ($p \in N$)

a) (0,75) Si le couple (n ;m) vérifie la relation (F) alors :

$7^n - 3x2^m = 1 \Leftrightarrow 7^n - 3 \text{ x } 2^5 \text{ x } 2^p = 1 \Leftrightarrow 7^n - 3 \text{ x } 32 \text{ x } 2^p = 1$

Ainsi en passant aux congruences modulo 32 : **$7^n \equiv 1$ [32].**

b) (0,75) En étudiant les restes de la division par 32 des puissances de 7, montrer que si le couple (n ;m) vérifie la relation (F) alors n est divisible par 4.

On a : $7^1 \equiv 7$ [32] ; $7^2 \equiv 17$ [32] ; $7^3 \equiv 23$ [32] ; $7^4 \equiv 1$ [32].

La suite des restes de la division euclidienne de 7^n par 32 est donc périodique de période 4. En effet :

Si $n \equiv 0$ [4] alors $n = 4k$ ($k \in N^*$) et $7^n \equiv 7^{4k} \equiv 2401^k \equiv 1$ [32]

Si $n \equiv 1$ [4] alors $n = 4k+1$ ($k \in N$) et $7^n \equiv 7^{4k}x7 \equiv 2401^k x7 \equiv 7$ [32]

Si $n \equiv 2$ [4] alors $n = 4k+2$ ($k \in N$) et $7^n \equiv 7^{4k} x7^2 \equiv 2401^k x 49 \equiv 1x49 \equiv 17$ [32]

Si $n \equiv 3$ [4] alors $n = 4k+3$ ($k \in N$) et $7^n \equiv 7^{4k}x7^3 \equiv 2401^k x 343 \equiv 1 x 23 \equiv 23$ [32]

Les puissances de 7 dont le reste dans la division par 32 est égal à 1 sont donc celles dont l'exposant n est un multiple de 4.

c) (0,75) D'après les deux questions précédentes si un couple (n ; m) est solution de (F), alors :

$7^n \equiv 1$ [32] et n est un multiple de 4.

Il existe donc k entier naturel tel que n = 4k, d'où en substituant :

$7^{4k} \equiv 1$ [32] $\Leftrightarrow$ $2401^k \equiv 1$ [32]

Or $2401 = 5\times480+1$, c'est-à-dire que $2401 \equiv 1$ [5] donc :

$2401^k \equiv 1$ [5] $\Leftrightarrow$ **$7^n \equiv 1$ [5]** en revenant à l'écriture initiale de la puissance.

d) (0,5) Soit $m \geq 5$: Soit (n ; m) un couple solution de (F) ; donc $7^n - 3x2^m = 1$ et $7^n \equiv 1$ [5]

Donc : $3x2^m = 7^n - 1 \equiv 0$ [5] Ceci n'est pas possible puisque 5 ne divise ni 2, ni 3.

Conclusion : il n'existe pas de couple solution avec un second terme supérieur à 5

3. (0,25) Conclusion : **D'après les questions 1. et 2. les seuls couples solutions de (F) sont (1 ; 1) et (2 ; 4).**

Exercice 3

1.

a. f est de la forme UV avec $U(x) = 2x$, U dérivable sur Ë et $U'(x) = 2$

$$V(x) = a(\ln x)^2 + b \ln x + c \quad V \text{ dérivable sur }]0 ; +õ[\text{ et } V'(x) = 2a(\ln x) \times \frac{1}{x} + \frac{b}{x}$$

Donc f est dérivable sur] 0 ; + õ [et $f'(x) = 2a(\ln x)^2 + 2b \ln x + 2c + 2x(2a(\ln x) \times \frac{1}{x} + \frac{b}{x}) = 2a(\ln x)^2 + 2b \ln x + 2c + 4a\ln x + 2b$

b. $f\,'(\frac{1}{e})$ est égal au coefficient directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse $\frac{1}{e}$ donc $f\,'(\frac{1}{e}) = 0$

$f\,'(\sqrt{e}\,)$ est égal au coefficient directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse $\sqrt{e}$ donc $f\,'(\sqrt{e}\,) = 0$

$f\,'(e)$ est égal au coefficient directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse e donc $f\,'(e) = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{2e-0}{e-\frac{e}{2}} = 4$

c. Or $f\,'(\frac{1}{e}) = 0 \Leftrightarrow 2(\,a(\ln\frac{1}{e})^2 + (b+2a)\ln(\frac{1}{e}) + c + b) = 0 \Leftrightarrow a - b - 2a + c + b = 0 \Leftrightarrow -a + c = 0 \Leftrightarrow a = c$ ($\ln(\frac{1}{e}) = -1$)

$f\,'(\sqrt{e}\,) = 0 \Leftrightarrow 2(a(\ln\sqrt{e})^2 + (b+2a)\ln(\sqrt{e}\,) + c + b) = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + a + c + b = 0 \Leftrightarrow 5a + 6b + 4c = 0$ ($\ln\sqrt{e} = \frac{1}{2}$)

$f'(e) = 4 \Leftrightarrow 2(a + b + 2a + c + b) = 4 \Leftrightarrow 3a + 2b + c = 2$

On obtient donc le système suivant $\begin{cases} a = c \\ 9a + 6b = 0 \\ 4a + 2b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ 3a + 2b = 0 \\ a = 2 \text{ Ligne 3 -ligne 2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ c = 2 \\ b = -3 \end{cases}$

Donc $f(x) = 2x(\,2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2)$

a. $f(x) = 2x\ln x(\,2\ln x - 3) + 4x$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x\ln x = +$ õ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\ln x - 3 = +$õ donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +$ õ

b. on a vu que pour $x > 0$: $f'(x) = a(\ln x)^2 + b\ln x + c + 2a\ln x + b = 4(\ln x)^2 + 2\ln x - 2$

Or $2(\ln x + 1)(2\ln x - 1) = 4(\ln x)^2 + 2(\ln x) - 2 = f'(x)$

c. pour $x > 0$: $\ln x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq e^{-1} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{e}$ et $2\ln x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x \geq \sqrt{e}$ D'où :

x	0	$\frac{1}{e}$	$\sqrt{e}$	$+\infty$
Signe de 2lnx -1	-	-	+	
signe de *ln x +1*	-	+	+	
Signe de f'(x)	+	-	+	
f	0 ↗	$\frac{14}{e}$ ↘	$2\sqrt{e}$ ↗	+ õ

3.

a. les abscisses des points d'intersection de C et de D_2 sont les solutions de l'équation $f(x) = 2x$

Or pour $x > 0$: $2x(\,2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2) = 2x \Leftrightarrow 2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 = 1 \Leftrightarrow 2X^2 - 3X + 2 = 1$ avec $X = \ln x$

On obtient donc $2X^2 - 3X + 1 = 0$ $\Delta = 1 > 0$ donc $X = \frac{1}{2}$ ou $X = 1$ ce qui donne $\ln x = \frac{1}{2}$ ou $\ln x = 1$ soit $x = \sqrt{e}$ ou $x = e$

Donc il y a deux points d'intersection entre C et D_2 : $C(\sqrt{e}\,;\,2\sqrt{e})$ et $D(e\,;\,2e)$

b. les abscisses des points d'intersection de C et de D_α sont les solutions de l'équation $f(x) = \alpha x$

Or pour $x > 0$: $f(x) = \alpha x \Leftrightarrow 4(\ln x)^2 - 6\ln x + 4 = \alpha \Leftrightarrow 4X^2 - 6X + 4 - \alpha = 0$

$\Delta = 36 - 16(\,4 - \alpha\,) = 16\alpha - 28 = 4(\,4\alpha - 7\,)$

Donc si $4\alpha - 7 > 0$ c'est-à-dire si $\alpha > \frac{7}{4}$ alors $\Delta > 0$ et l'équation a deux solutions donc C et D_α ont deux points d'intersection

Si $\alpha = \frac{7}{4}$ alors $\Delta = 0$ et l'équation a une seule solution donc C et D_α ont un point d'intersection

Si $\alpha < 7/4$ alors $\Delta < 0$ et l'équation n'a pas de solutions donc C et D_α n'ont pas de point d'intersection

Exercice 4

Partie A : ROC voir cours

Partie B : Dans le plan complexe, soit A le point d'affixe $z_A = i$ et B le point d'affixe $z_B = e^{-\frac{i5\pi}{6}}$.

1) a) r est la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'.

L'écriture complexe d'une rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle θ est : $(z' - \omega) = e^{i\theta}(z - \omega)$

donc une écriture de r est : $\boxed{z' = e^{\frac{i2\pi}{3}} z}$

b) B a pour affixe $z_B=e^{-\frac{i5\pi}{6}}$ et C est l'image de B par r. Donc : $z_C=e^{\frac{i2\pi}{3}}e^{-\frac{i5\pi}{6}}=e^{-\frac{i\pi}{6}}$ soit $\boxed{\boldsymbol{z_C=e^{-\frac{i\pi}{6}}}}$

c) $z=re^{i\theta}$=r(cosθ+isinθ) d'où :

$\boldsymbol{z_B}=1\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)=\boxed{\boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}}$ et $\boldsymbol{z_C}=1\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)=\boxed{\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}}$

d) Voir figure du plan.

2) a) D est le barycentre des points A B et C affectés des coefficients 2, -1 et 2. 2-1+2=3, 3≠0 donc D existe.

Pour tout point M du plan, on a : $2\,\vec{MA}-\vec{MB}+2\,\vec{MC}=(2-1+2)\,\vec{MD}$

En particulier, pour le point O, on obtient : $2\,\vec{OA}-\vec{OB}+2\,\vec{OC}=3\,\vec{OD}$

Ceci se traduit par l'égalité sur les affixes : $2z_A-z_B+2z_C=3z_D$

d'où : $z_D=\frac{1}{3}(2z_A-z_B+2z_C)=\frac{1}{3}\left(2i+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i+\sqrt{3}-i\right)=\boxed{\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}}$

b) $|z_A|=|i|=1$; $|z_B|=|e^{-\frac{i5\pi}{6}}|=1$ car, pour tout x, $|e^{ix}|=1$ De même, $|z_C|=|e^{-\frac{i\pi}{6}}|=1$; $z_D=e^{\frac{i\pi}{6}}$ donc $|z_D|=1$.

Les quatre points A, B C et D sont sur le cercle de centre O et de rayon 1.

3) a) h est l'homothétie de centre A et de rapport 2.

Une écriture complexe de h est : $z'-z_A=2(z-z_A)$ donc $z'-i=2(z-i)$ soit $\boxed{\boldsymbol{z'=2z-i}}$

b) E est l'image de D par h, on a : $z_E=2z_D-i=\sqrt{3}+i-i=\sqrt{3}$ soit $\boxed{\boldsymbol{z_E=\sqrt{3}}}$

4)a) $\frac{z_D-z_C}{z_E-z_C}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)/\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\frac{i}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}=i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{\frac{i\pi}{3}}$ $\boxed{\boldsymbol{\frac{z_D-z_C}{z_E-z_C}=e^{\frac{i\pi}{3}}}}$

b) On en déduit $\left|\frac{z_D-z_C}{z_E-z_C}\right|=\frac{CD}{CE}=|e^{\frac{i\pi}{3}}|=1$ donc CD=CE

$\arg\frac{z_D-z_C}{z_E-z_C}=(\vec{CE},\vec{CD})=\arg\left(e^{\frac{i\pi}{3}}\right)=\frac{\pi}{3}$ [2π] CDE est isocèle et l'angle au sommet vaut $\frac{\pi}{3}$, c'est un triangle équilatéral.