

Correction devoir maison n°11

Exercice 1

Partie A

1) f est une fonction rationnelle donc ses limites à l'infini sont égales aux limites du quotient de ses termes de plus haut degré. On a donc :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

2) f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u = x$, $v = x^2 + 1$ et donc $u' = 1$ et $v' = 2x$.

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{(x^2 + 1) - x \times 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2}$$

Le dénominateur est strictement positif et le numérateur est du signe de $a = -1$ sauf entre les deux racines 1 et -1 .

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$
Variations de f	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

3) Quand x décrit $\mathbb{R}$, on voit, d'après le tableau de variations de f , que $f(x)$ décrit l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$, les extremums étant atteints pour $x = -1$ et $x = 1$.

Partie B

1) G_k existe si et seulement si la somme des coefficients est non nulle. On doit donc avoir $k^2 + 1 - k + k \neq 0$ ce qui signifie, $k^2 + 1 \neq 0$, ce qui est toujours vrai. Donc $\boxed{D = \mathbb{R}}$.

2) Pour G_1 : c'est le barycentre de $(A; 2)$, $(B; -1)$ et $(C; 1)$. On considère I le barycentre de $(A; 2)$ et $(B; -1)$. On le construit grâce à l'égalité $\vec{AI} = -\vec{AB} = \vec{BA}$ (autrement dit I est le symétrique de B par rapport à A).

Par associativité du barycentre, G_1 est le barycentre de $(I; 2 - 1)$ et $(C; 1)$, autrement dit le milieu de $[CI]$.

Pour G_{-1} : c'est le barycentre de $(A; 2)$, $(B; 1)$ et $(C; -1)$. On considère J le barycentre de $(A; 2)$ et $(C; -1)$. On le construit grâce à l'égalité $\vec{AJ} = -\vec{AC} = \vec{CA}$ (autrement dit J est le symétrique de C par rapport à A).

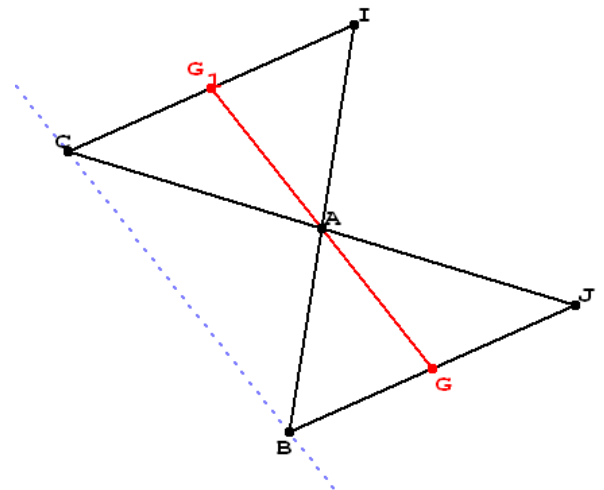
Par associativité du barycentre, G_{-1} est le barycentre de $(J; 2 - 1)$ et $(B; 1)$ donc c'est le milieu de $[BJ]$.

3) On considère $k \in D = \mathbb{R}$:

$$\vec{AG_k} = -\frac{k}{k^2 + 1} \vec{AB} + \frac{k}{k^2 + 1} \vec{AC} = \frac{k}{k^2 + 1} (\vec{BA} + \vec{AC})$$

Et donc $\boxed{\vec{AG_k} = \frac{k}{k^2 + 1} \vec{BC}}$.

Ceci nous permet de dire que les vecteurs $\vec{AG_k}$ et $\vec{BC}$ sont colinéaires et que les droites (AG_k) et (BC) sont parallèles. Le point G_k appartient alors à la parallèle à (BC) passant par A .



4) D'après la partie A, on sait que quand k décrit $\mathbb{R}$, $\frac{k}{k^2+1}$ décrit $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ et que les valeurs extrêmes sont atteintes pour $k = -1$ et $k = 1$. Autrement dit, G_k décrit le segment $[G_1 G_{-1}]$

Exercice 2

$$1) \quad \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BE} = BC \times BE \times \cos(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BE}) = 1 \times 1 \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \text{ donc } \boxed{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BE} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Comme $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$, on a $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BE}$ et donc $\boxed{\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BE} = -\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$$2) \quad \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EB} = EA \times EB \times \cos(\overrightarrow{EA}; \overrightarrow{EB}) = 1 \times 1 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \text{ et donc } \boxed{\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EB} = \frac{1}{2}}$$

3) On sait que $BC = BG = 1$ donc BCG est un triangle isocèle en B . De plus $\widehat{GBC} = \widehat{GBE} - \widehat{EBC} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ et comme un triangle isocèle qui a un angle de $\frac{\pi}{3}$ est un triangle équilatéral (les autres angles mesurent aussi $\frac{\pi}{3}$), on peut en déduire que $\boxed{BCG \text{ est un triangle équilatéral}}$.

$$4) \quad \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BG} = BC \times BG \times \cos(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BG}) = 1 \times 1 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \text{ et donc } \boxed{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BG} = \frac{1}{2}}$$

Comme à la question 1 : $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BG} = -\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BG}$ et donc $\boxed{\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{EF} = -\frac{1}{2}}$

$$5) \quad \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EF} = -EA \times EF \times \cos(\overrightarrow{EA}; \overrightarrow{EF}) = -1 \times 1 \times \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \text{ et donc}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{EF} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

6) $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{BF} = (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}) \cdot (\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EF}) = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{EF}$ et en utilisant toutes les questions précédentes :

$$\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{BF} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et donc } \boxed{\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{BF} = 0}$$

7) Le résultat de la question précédente démontre que les droites (DE) et (BF) sont perpendiculaires. Or dans le carré $BGFE$, les diagonales (BF) et (EG) sont aussi perpendiculaires. Ceci démontre que (DE) et (EG) sont parallèles en tant que perpendiculaires à une même troisième.

Or ces droites ont le point E en commun donc $\boxed{D, E \text{ et } G \text{ sont alignés}}$