Devoir maison n°13

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

1) Etudier le sens de variations de (u_n).
2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$ avec a et b sont deux nombres à déterminer.
3) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$. Exprimer S_n en fonction de n.
4) On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{x+1}$ définie sur $[1; +\infty[$.
   a. Calculer la limite de f en $+\infty$.
   b. Etudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations sur $[1; +\infty[$.
   c. En déduire à quel intervalle appartient $f(x)$ lorsque $x \in [1; +\infty[$.
5) Déduire des questions précédentes le sens de variations de (S_n) ainsi que (S_n) est bornée.
6) On considère (T_n) définie par $T_n = 1 - S_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   a. A partir de quelle valeur de n a-t-on $0 < T_n \leq 10^{-2}$? Justifier.
   b. Combien la suite (S_n) possède-t-elle des termes n'appartenant pas) $[0{,}99; 1]$? Justifier.

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par récurrence par $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 6 - \frac{2}{3}u_n \end{cases}$.

1) Calculer u_1, u_2 et u_3.
2) Dans un repère orthonormé (unité $2\ cm$), représenter la courbe de la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ puis placer les points sur l'axe des abscisses correspondant à u_0, u_1, …, u_6.
3) La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ? Justifier.
4) On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - \frac{18}{5}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   a. Calculer v_0, v_1 et v_2.
   b. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique et préciser sa raison.
   c. En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis l'expression de u_n en fonction de n.