Correction devoir maison n°13

Exercice 1

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n(n+1)(n+2)} - \frac{n+2}{n(n+1)(n+2)} = -\frac{2}{n(n+1)(n+2)} < 0$

Donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est décroissante}}$.

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{n(n+1)} = \frac{a(n+1)+bn}{n(n+1)} \Leftrightarrow \frac{1}{n(n+1)} = \frac{(a+b)n+a}{n(n+1)}$

Par identification, on trouve : $\begin{cases} a+b=0 \\ a=1 \end{cases}$ et donc $\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$. Finalement : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}$

3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$

après simplification. D'où : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, S_n = \frac{n}{n+1}}$

4) $f : x \mapsto \frac{x}{x+1}$ sur $[1; +\infty[$ On remarque que $S_n = f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

a. f est une fonction rationnelle donc sa limite en $+\infty$ est égale à la limite du quotient de ses termes de plus haut degré : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1$.

Donc $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1}$

b. f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u = x$, et $v = x + 1$ donc elle est dérivable sur $[1; +\infty[$ et

$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{(x+1) - x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$

Le dénominateur est clairement positif, tout comme le numérateur donc $f'(x)$ est positif sur $[1; +\infty[$ et f est croissante sur cet intervalle.

x	1	$+\infty$
Variations de f	$\frac{1}{2}$ ↗	1

c. On en déduit que pour $x \in [1; +\infty[$, on a $\boxed{f(x) \in \left[\frac{1}{2}; 1\right[}$

5) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = f(n)$ et la fonction f est croissante sur $[1; +\infty[$ donc $\boxed{(S_n) \text{ est croissante}}$

De plus, comme $f(x) \in \left[\frac{1}{2}; 1\right[$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{S_n \in \left[\frac{1}{2}; 1\right[}$ donc (S_n) est bornée.

6) $T_n = 1 - S_n = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a. On doit résoudre $T_n \leq 10^{-2}$ car il est évident que $T_n > 0$.

$T_n \leq 10^{-2} \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{100} \Leftrightarrow n + 1 \geq 100 \Leftrightarrow n \geq 99$

Donc $\boxed{0 < T_n \leq 10^{-2} \text{ à partir de } n = 99}$.

b. On doit résoudre $0{,}99 \leq S_n \leq 1$ or :

$0{,}99 \leq S_n \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -S_n \leq -0{,}99 \Leftrightarrow 0 \leq 1 - S_n \leq 0{,}01 \Leftrightarrow 0 \leq T_n \leq 10^{-2} \Leftrightarrow n \geq 99$

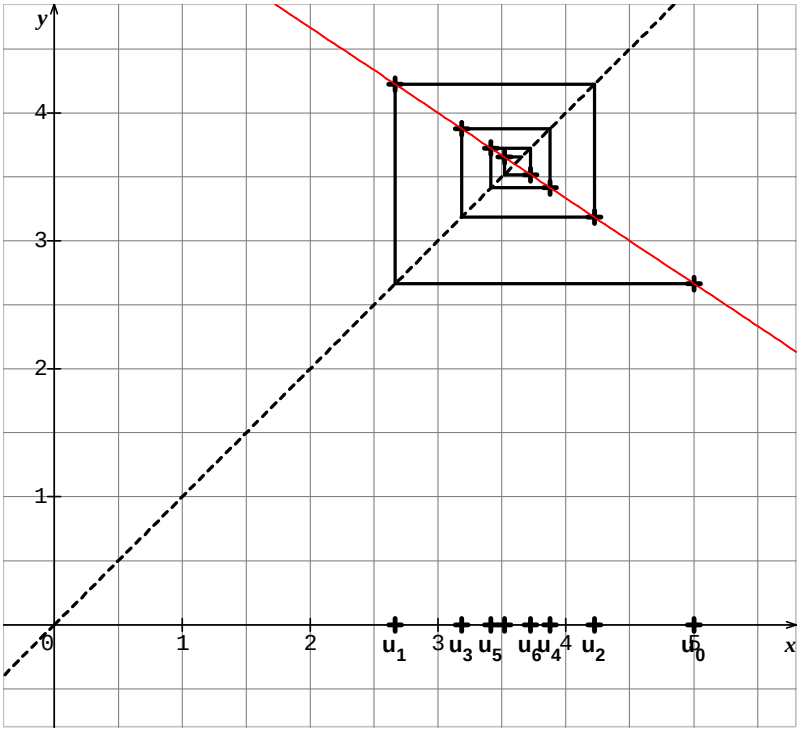
Donc, à partir du rang 99, tous les termes S_n appartiennent à $[0{,}99; 1]$ et tous les premiers termes n'appartiennent donc pas à cet intervalle. Autrement dit $\boxed{(S_n) \text{ possède 98 termes n'appartenant pas à } [0{,}99; 1]}$

Exercice 2

1) $u_1 = 6 - \frac{2}{3}u_0 = 6 - \frac{2}{3} \times 5 = \frac{18-10}{3} = \boxed{\frac{8}{3}}$; $u_2 = 6 - \frac{2}{3}u_1 = 6 - \frac{2}{3} \times \frac{8}{3} = \frac{54-16}{9} = \boxed{\frac{38}{9}}$

$u_3 = 6 - \frac{2}{3}u_2 = 6 - \frac{2}{3} \times \frac{38}{9} = \frac{162-76}{27} = \boxed{\frac{86}{27}}$

2)



3) $u_1 - u_0 = \frac{8}{3} - 5 = \frac{8-15}{3} = -\frac{7}{3}$ et $u_2 - u_1 = \frac{38}{9} - \frac{8}{3} = \frac{38-24}{9} = \frac{14}{9} \neq -\frac{7}{3}$

donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ n'est pas arithmétique}}$.

$\frac{u_1}{u_0} = \frac{\frac{8}{3}}{5} = \frac{8}{15}$; $\frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{38}{9}}{\frac{8}{3}} = \frac{38}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{19}{12} \neq \frac{8}{15}$

Donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ n'est pas géométrique}}$

4) $v_n = u_n - \frac{18}{5}$

a. $v_0 = u_0 - \frac{18}{5} = 5 - \frac{18}{5} = \frac{25-18}{5} = \boxed{\frac{7}{5}}$; $v_1 = u_1 - \frac{18}{5} = \frac{8}{3} - \frac{18}{5} = \frac{40-54}{15} = \boxed{-\frac{14}{15}}$

$v_2 = u_2 - \frac{18}{5} = \frac{38}{9} - \frac{18}{5} = \frac{190-162}{45} = \boxed{\frac{28}{45}}$

b. Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{18}{5} = 6 - \frac{2}{3}u_n - \frac{18}{5} = -\frac{2}{3}\left(v_n + \frac{18}{5}\right) + \frac{30-18}{5} = -\frac{2}{3}v_n - \frac{12}{5} + \frac{12}{5} = -\frac{2}{3}v_n$$

Donc $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est géométrique de raison } -\frac{2}{3}}$

c. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\boxed{v_n = \frac{7}{5} \times \left(-\frac{2}{3}\right)^n}$ puis, comme $u_n = v_n + \frac{18}{5}$, on trouve :

$\boxed{u_n = \frac{18}{5} + \frac{7}{5} \times \left(-\frac{2}{3}\right)^n}$