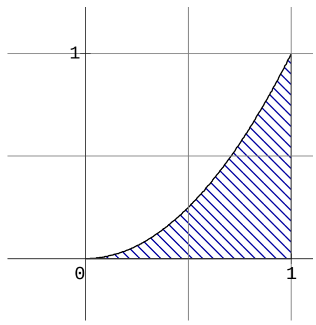
Devoir maison n°14

Exercice 1

Deux sociétés A et B se partagent le marché des télécommunications d'une région.
Actuellement, A détient 90% de la clientèle. Une étude de marché permet de penser que, chaque année, 20% des clients de A changerons pour B et que, réciproquement, 20% des clients de B changeront pour A.
On étudie un groupe représentatif de 1000 clients et on suppose que la tendance estimée va se poursuivre.
On voudrait prévoir l'évolution du nombre de clients des deux sociétés.
On note a_0 le nombre de clients actuels de A, b_0 celui de B, a_n le nombre de clients de A dans n années et b_n celui de B.

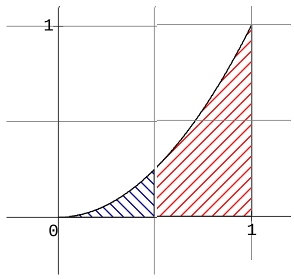
1) Calculer a_0, b_0, a_1, b_1.
2) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 0{,}8a_n + 0{,}2b_n$ puis que $a_{n+1} = 0{,}6a_n + 200$.
3) Déterminer un réel k tel que la suite de terme général $u_n = a_n - k$ soit une suite géométrique. Préciser la raison de cette suite.
4) Exprimer u_n en fonction de n.
5) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 400 \times 0{,}6^n + 500$.
6) Etudier le sens de variations de la suite (a_n) ainsi que sa limite.
7) Que peut-on en conclure ?

Exercice 2



Dans le plan muni du repère orthonormal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, on considère la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2$.
On va calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine Δ délimité par la courbe $\mathcal{P}$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 1$.

1) On considère $I(1;0)$, $J(1;1)$ et $K(0;1)$. En remarquant que Δ est inclus dans le carré $OIJK$, montrer que $0 \leq \mathcal{A} \leq 1$.



2) On partage le domaine Δ en deux tranches verticales Δ_1 et Δ_2 de largeur $\frac{1}{2}$ et d'aires respectives $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$.
   a. Par un procédé analogue à la question précédente, justifier que $0 \leq \mathcal{A}_1 \leq \frac{1}{8}$ et $\frac{1}{8} \leq \mathcal{A}_2 \leq \frac{1}{2}$.
   b. En déduire que $\frac{1}{8} \leq \mathcal{A} \leq \frac{5}{8}$.
3) On considère un entier $n \geq 2$. On partage maintenant Δ en n tranches $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ de largeur $\frac{1}{n}$ et d'aires respectives $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$.
   a. On considère un entier i entre 1 et n. En encadrant la tranche Δ_i entre deux rectangles, justifier que $\frac{(i-1)^2}{n^3} \leq \mathcal{A}_i \leq \frac{i^2}{n^3}$.
   b. En déduire que $\frac{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2}{n^3} \leq \mathcal{A} \leq \frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$.
4) On va étudier la suite (u_n) de terme général $u_n = \frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$.
   a. En utilisant la question précédente, montrer que pour tout $n \geq 2$, $0 \leq u_n - \mathcal{A} \leq \frac{1}{n}$.
   b. En déduire que (u_n) converge et préciser sa limite.
   c. Déterminer un polynôme de degré 3 tel que , pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x+1) - P(x) = x^2$.
   d. Calculer de deux manières différentes
$$\sum_{k=0}^{n} \big(P(k+1) - P(k)\big)$$
   e. En déduire que $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
   f. Déterminer alors la limite de la suite (u_n) et la valeur de $\mathcal{A}$.