# *Correction devoir maison n°14*

**Exercice 1**

1) Sur 1000 clients, 90% sont des clients de $A$ et 10% de $B$. Donc : $a_0 = \frac{90}{100} \times 1000 =$ et $\boxed{a_0 = 900}$ et $\boxed{b_0 = 100}$.

Au bout d'un an, 20% des clients de $A$, soit $\frac{20}{100} \times 900 = 180$, sont passés chez $B$ et 20% des clients de $B$, soit 20, sont passés chez $A$. D'où : $a_1 = 900 - 180 + 20$ et donc $\boxed{a_0 = 740}$ et $b_1 = 100 + 180 - 20$ d'où $\boxed{b_1 = 260}$.

Remarque : on peut vérifier qu'aucun client ne s'est perdu en route : $740 + 260 = 1000$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ : entre $n$ années et $(n+1)$ année, 20% des clients de $A$ passe chez $B$, ce qui représente $\frac{20}{100} a_n = 0{,}2\, a_n$ et 20% des clients de $B$ passe chez $A$, ce qui représente $\frac{20}{100} b_n = 0{,}2\, b_n$.

On a donc $a_{n+1} = a_n - 0{,}2a_n + 0{,}2\, b_n$ ce qui montre bien $\boxed{a_{n+1} = 0{,}8a_n + 0{,}2b_n}$.

Par ailleurs, le nombre total de clients est toujours égal à 1000 donc $b_n = 1000 - a_n$.

En remplaçant dans l'expression de $a_{n+1}$, on trouve :

$a_{n+1} = 0{,}8a_n + 0{,}2(1000 - a_n) = 0{,}8a_n + 200 - 0{,}2a_n$ et donc $\boxed{a_{n+1} = 0{,}6a_n + 200}$.

3) On considère la suite $(u_n)$ géométrique de raison $q$ telle que $u_n = a_n - k$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n$ ce qui donne :$a_{n+1} - k = q(a_n - k)$.

En utilisant la question précédente : $0{,}6a_n + 200 - k = qa_n - qk$

Par identification : $\begin{cases} q = 0{,}6 \\ 200 - k = -qk \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 0{,}6 \\ k = 500 \end{cases}$.

$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ de terme général } u_n = a_n - 500 \text{ est donc géométrique de raison } 0{,}6.}$

4) On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :$u_n = u_0 \times q^n$ or $u_0 = a_0 - 500 = 900 - 500 = 400$ et $q = 0{,}6$.

D'où $\boxed{u_n = 400 \times 0{,}6^n}$.

5) Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a_n - 500$, on a $a_n = u_n + 500$ et donc $\boxed{a_n = 400 \times 0{,}6^n + 500}$.

6) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$a_{n+1} - a_n = 400 \times 0{,}6^{n+1} + 500 - 400 \times 0{,}6^n - 500 = 400 \times 0{,}6^n \times (0{,}6 - 1) = -160 \times 0{,}6^n < 0$$

Donc $\boxed{\text{la suite } (a_n) \text{ est décroissante}}$.

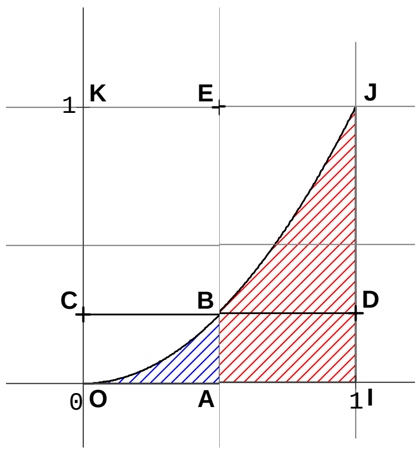
Par ailleurs, $(u_n)$ est une suite géométrique de raison $q$ telle que $0 < q < 1$ donc la suite $(u_n)$ converge et sa limite est 0. Comme $a_n = u_n + 500$ , la suite $(a_n)$ est également convergente et sa limite est 500.

7) Finalement, si la tendance se poursuit, le nombre de clients de $A$ va se rapprocher de 500 sur 1000, autrement dit, la moitié des clients le seront auprès de $A$ et l'autre moitié auprès de $B$.

**Exercice 2**

1) Le carré $OIJK$ est un carré de côté 1 donc l'aire est égale à 1. On a donc $\boxed{0 \leq \mathcal{A} \leq 1}$.

2) On peut considérer les points supplémentaires $A\left(\frac{1}{2}; 0\right)$, $B\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$ (le point $B$ est sur la parabole $\mathcal{P}$), $C\left(0; \frac{1}{4}\right)$, $D\left(1; \frac{1}{4}\right)$ et $E\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.




a. Le domaine $\Delta_1$ est inclus dans le rectangle $OABC$, d'aire $OA \times AB = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$. D'où : $\boxed{0 \leq \mathcal{A}_1 \leq \frac{1}{8}}$.

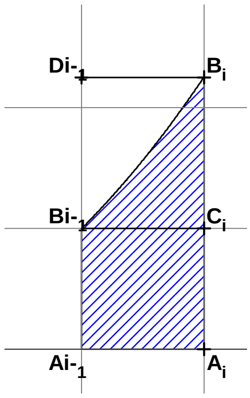
Par ailleurs, le domaine $\Delta_2$ est compris dans le rectangle $ABDI$ et $AEJI$.

Or l'aire de $ABDI$ est égale à $AI \times AB = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ et l'aire de $AEJI$ est égale à $AE \times AI = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. D'où $\boxed{\frac{1}{8} \leq \mathcal{A}_2 \leq \frac{1}{2}}$

b. Comme $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}$, on trouve, en ajoutant les deux inégalités :$\boxed{\frac{1}{8} \leq \mathcal{A} \leq \frac{5}{8}}$ car $\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$.

3) On découpe maintenant $\Delta$ en $n$ tranches, $n \geq 2$. La tranche $\Delta_i$ est comprise

entre les droites verticales d'équations $x = \frac{i-1}{n}$ et $x = \frac{i}{n}$ (en effet $\Delta_1$ est bien comprise entre $x = 0$ et $x = \frac{1}{n}$ ; $\Delta_2$ est bien comprise entre $x = \frac{1}{n}$ et $x = \frac{2}{n}$...)




a. On considère la tranche $\Delta_i$ : on peut noter $A_{i-1}\left(\frac{i-1}{n};0\right)$ ; $A_i\left(\frac{i}{n};0\right)$ ; $B_{i-1}\left(\frac{i-1}{n};\left(\frac{i-1}{n}\right)^2\right)$ ; $B_i\left(\frac{i}{n};\left(\frac{i}{n}\right)^2\right)$ ; $D_{i-1}\left(\frac{i-1}{n};\left(\frac{i}{n}\right)^2\right)$ et $C_i\left(\frac{i}{n};\left(\frac{i-1}{n}\right)^2\right)$. Les points $B_{i-1}$ et $B_i$ appartiennent à la parabole $\mathcal{P}$.

Le domaine $\Delta_i$ est compris entre le rectangle $A_{i-1}A_iC_iB_{i-1}$ d'aire $A_{i-1}A_i \times A_{i-1}B_{i-1} = \frac{1}{n} \times \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 = \frac{(i-1)^2}{n^3}$ et le rectangle $A_{i-1}A_iB_iD_{i-1}$ d'aire $A_{i-1}A_i \times A_iB_i = \frac{1}{n} \times \left(\frac{i}{n}\right)^2 = \frac{i^2}{n^3}$. D'où $\boxed{\frac{(i-1)^2}{n^3} \leq \mathcal{A}_i \leq \frac{i^2}{n^3}}$

b. En ajoutant les aires des différentes tranches, on obtient :

$$\frac{0^2}{n^3} + \frac{1^2}{n^3} + \cdots + \frac{(n-1)^2}{n^3} \leq \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \cdots + \mathcal{A}_n \leq \frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \cdots + \frac{n^2}{n^3}$$

ou encore $\boxed{\frac{1^2 + 2^2 + .. + (n-1)^2}{n^3} \leq \mathcal{A} \leq \frac{1^2 + 2^2 + .. + n^2}{n^3}}$

4) $u_n = \frac{(1^2+2^2+\cdots+n^2)}{n^3}$

a. Pour $n \geq 2$ : $-\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3} \leq -\mathcal{A} \leq -\frac{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2}{n^3}$ grâce à la question précédente puis, en ajoutant $u_n$ : $0 \leq u_n - \mathcal{A} \leq \frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3} - \frac{1^1+2^2+\cdots+(n-1)^2}{n^3}$.

Or, dans le membre de droite, tous les termes se simplifient au numérateur, à part $n^2$. Ce qui donne $\frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}$.

On trouve bien : $\boxed{0 \leq u_n - \mathcal{A} \leq \frac{1}{n}}$.

b. Comme la limite de $\frac{1}{n}$ quand $n$ tend vers $+\infty$ est égale à 0, d'après le théorème des gendarmes, la suite $(u_n - \mathcal{A})$ converge et sa limite est égale à 0 ce qui montre que $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } \mathcal{A}}$.

c. On cherche un polynôme de la forme $P: x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ tel que $P(x+1) - P(x) = x^2$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Or $P(x+1) = a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d$ d'où, en développant :
$P(x+1) = ax^3 + (3a+b)x^2 + (3a+2b+c)x + a + b + c + d$. D'où :
$P(x+1) - P(x) = 3ax^2 + (3a+2b)x + a + b + c$ . Par identification, on trouve donc ,pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$P(x+1) - P(x) = x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 1 \\ 3a + 2b = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{6} \end{cases}$$ d'où $\boxed{P(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x}$ (il n'y a aucune contrainte pour $d$ donc on peut prendre $d = 0$).

d. On note $S$ la somme de l'énoncé. Alors
$S = P(1) - P(0) + P(2) - P(1) + P(3) - P(2) + \cdots + P(n+1) - P(n)$
En simplifiant les termes $P(1), P(2), \ldots, P(n)$, il reste :

$$S = P(n+1) - P(0) = \frac{1}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{6}(n+1) - 0 = \frac{(n+1)}{6}[2(n+1)^2 - 3(n+1) + 1]$$

$$S = \frac{(n+1)}{6}[2n^2 + 4n + 2 - 3n - 3 + 1]$$

$$S = \frac{n+1}{6}[2n^2 + n]$$

Et donc $\boxed{S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

Par ailleurs, comme par construction $P(k+1) - P(k) = k^2$, on a $\boxed{S = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}$.

e. On a donc $\boxed{1^2 + 2^2 + .. + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

f. Pour $n \geq 2$ : $u_n = \frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$

Or, pour calculer la limite de ce terme général qui est une fonction rationnelle, on conserve les termes de plus haut degré ; $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^3}{6n^3} = \frac{1}{3}$.

En utilisant la question $b$., on trouve donc $\boxed{\mathcal{A} = \frac{1}{3}}$