

## Correction devoir maison n°15

### Exercice 1

D'après l'énoncé :  $p_2 = \frac{p_1}{2}$  ;  $p_3 = \frac{p_1}{4}$  ;  $p_4 = \frac{p_1}{8}$  ;  $p_5 = \frac{p_1}{16}$  et  $p_6 = \frac{p_1}{32}$ .

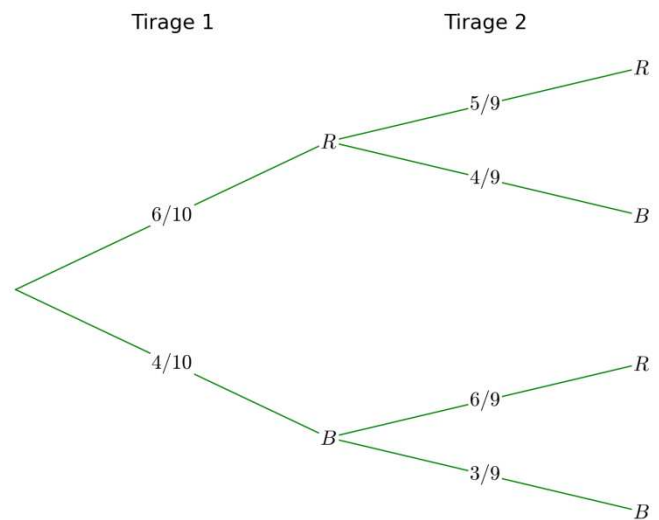
La somme des probabilités est égale à 1 donc  $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$  et en remplaçant par les expressions précédentes :  $p_1 + \frac{p_1}{2} + \frac{p_1}{4} + \frac{p_1}{8} + \frac{p_1}{16} + \frac{p_1}{32} = 1$ .

Ceci nous donne :  $\frac{(32+16+8+4+2+1)p_1}{32} = 1$  ou encore  $p_1 = \frac{32}{63}$

D'où :  $p_2 = \frac{16}{63}$  ;  $p_3 = \frac{8}{63}$  ;  $p_4 = \frac{4}{63}$  ;  $p_5 = \frac{2}{63}$  ;  $p_6 = \frac{1}{63}$

### Exercice 2

1) On considère qu'il y a 6 boules rouges et 4 boules blanches dans l'urne. Voici l'arbre représentant la situation :



a.  $p(RR) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{1}{3}$

$p(BB) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$

Donc la probabilité d'obtenir deux boules de la même

couleur est  $p(A) = \frac{1}{3} + \frac{2}{15} = \frac{7}{15}$

b. La probabilité de gagner 1 € est  $\frac{7}{15}$

d'après la question précédente et la probabilité de perdre 1 € est donc  $p(\bar{A}) = \frac{8}{15}$ .

D'où :  $E = \frac{7}{15} \times 1 + \frac{8}{15} \times (-1) = -\frac{1}{15}$

A priori, le jeu est défavorable.

2) Voici l'arbre de probabilité correspondant à la situation :

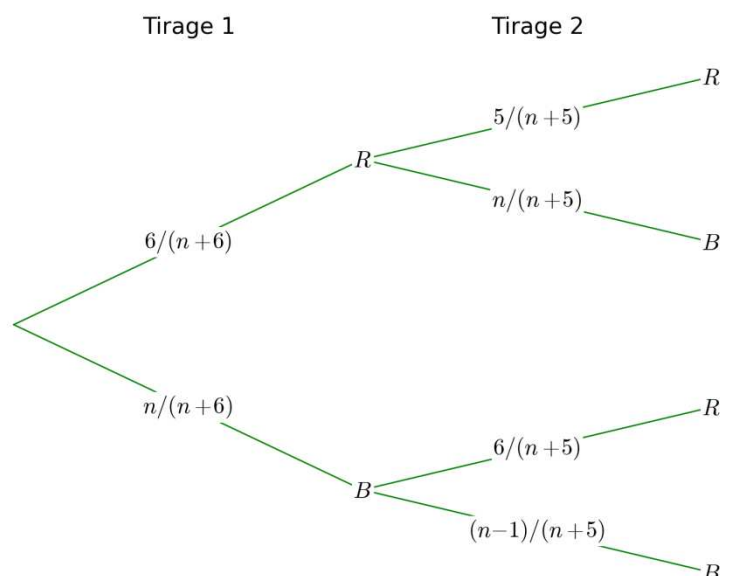
a.  $X$  est le gain algébrique du joueur donc  $X \in \{1; -1\}$ . En particulier,  $X = 1$  lorsque les deux boules ont la même couleur et  $X = -1$  lorsque les deux boules sont de couleurs différentes.

$$\begin{aligned} p(X = 1) &= p(RR) + p(BB) \\ &= \frac{6}{n+6} \times \frac{5}{n+5} + \frac{n}{n+6} \times \frac{n-1}{n+5} \\ &= \frac{30 + n^2 - n}{(n+6)(n+5)} \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} p(X = -1) &= p(RB) + p(BR) \\ &= \frac{6}{n+6} \times \frac{n}{n+5} + \frac{n}{n+6} \times \left(\frac{6}{n+5}\right) \\ &= \frac{12n}{(n+6)(n+5)} \end{aligned}$$

Nous avons donc :



|            |                                   |                          |
|------------|-----------------------------------|--------------------------|
| $x$        | 1                                 | -1                       |
| $P(X = x)$ | $\frac{n^2 - n + 30}{(n+6)(n+5)}$ | $\frac{12n}{(n+6)(n+5)}$ |

$$b. E(X) = 1 \times \frac{n^2 - n + 30}{(n+6)(n+5)} - 1 \times \frac{12n}{(n+6)(n+5)} = \frac{n^2 - 13n + 30}{(n+6)(n+5)}$$

c. Le jeu est équitable si  $E(X) = 0$  : on résout dans  $\mathbb{N}$  :

$$E(X) = 0 \Leftrightarrow \frac{n^2 - 13n + 30}{(n+6)(n+5)} = 0 \Leftrightarrow n^2 - 13n + 30 = 0$$

Cette équation du second degré a pour discriminant :  $\Delta = 49$  donc il y a deux solutions :  $n_1 = \frac{13+7}{2} = 10$  et  $n_2 = \frac{13-7}{2} = 3$ .

Le jeu est équitable s'il y a 3 boules blanches ou 10 boules blanches.

d. On doit résoudre dans  $\mathbb{N}$ ,  $E(X) < 0$  :

$$E(X) < 0 \Leftrightarrow \frac{n^2 - 13n + 30}{(n+6)(n+5)} < 0 \Leftrightarrow n^2 - 13n + 30 < 0 \text{ car le dénominateur est strictement positif.}$$

Le signe d'un trinôme est du signe de  $a$  sauf entre les racines donc les solutions sont les nombres compris entre 3 et 10.

Le jeu est défavorable s'il y a entre 4 et 9 boules blanches.

### Exercice 3

1) Un barycentre existe lorsque la somme des coefficients est non nulle, donc  $G$  existe si  $1 + b + c \neq 0$  donc

$$b + c \neq -1$$

$$2) x_G = \frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c} = \frac{0+b-c}{b+c-1} = \frac{b-c}{b+c-1} \text{ et } y_G = \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b+c} = \frac{1}{b+c-1} \text{ d'où } G\left(\frac{b-c}{b+c-1}; \frac{1}{b+c-1}\right)$$

3) Il y a 7 possibilités pour  $b$  et à chaque valeur de  $b$ , il y a 7 valeurs possibles pour  $c$  ce qui fait donc 49 tirages possibles. On considère qu'il y a équiprobabilité.

a. D'après la question 1),  $G$  existe si et seulement si  $b + c \neq -1$ . Les couples  $(b; c)$  tels que la somme soit égale à  $-1$  sont :  $(-3; 2); (-2; 1); (-1; 0); (0; -1); (1; -2)$  et  $(2; -3)$  ce qui fait donc 6 possibilités. Donc  $G$  existe avec une probabilité de  $\frac{49-6}{49}$  soit  $\frac{43}{49}$ .

b. Dans le cas où  $G$  existe donc  $b + c - 1 \neq 0$  :

$$x_G = 1 \Leftrightarrow \frac{b-c}{b+c-1} = 1 \Leftrightarrow b - c = b + c - 1 \Leftrightarrow c = -\frac{1}{2}$$

Or  $c$  est un nombre entier compris entre  $-3$  et  $3$  donc  $p(x_G = 1) = 0$

c. Dans le cas où  $G$  existe donc  $b + c - 1 \neq 0$  :

$$x_G = 0 \Leftrightarrow \frac{b-c}{b+c-1} = 0 \Leftrightarrow b - c = 0 \Leftrightarrow b = c$$

Ce qui donne donc 7 possibilités :  $(-3; -3); (-2; -2); (-1; -1); (0; 0); (1; 1); (2; 2)$  et  $(3; 3)$ .

$$\text{Donc } p(x_G = 0) = \frac{1}{7}$$

d.  $G$  appartient à l'un des axes de coordonnées si et seulement si  $x_G = 0$  ou  $y_G = 0$ .

Pour le cas  $x_G = 0$ , on l'a traité à la question précédente. Pour  $y_G = 0$  : ceci donne  $\frac{1}{b+c-1} = 0$  ce qui n'admet pas de solution. Donc au final,  $p(x_G = 0 \text{ ou } y_G = 0) = \frac{1}{7}$