

Correction devoir maison n°1**Exercice 1**

1) Il semble que le polynôme P ait trois racines car la courbe coupe trois fois l'axe des abscisses. On trouve $x_1 \approx -1,5$; $x_2 \approx 1,5$ et $x_3 \approx 4$.

2) $P(4) = 64 - 64 - 9 + 9 = 0$

4 est donc racine du polynôme P ; on en déduit que P est factorisable par $(x - 4)$.

On cherche donc a, b et c tels que $P(x) = (x - 4)(ax^2 + bx + c)$.

On développe le membre de droite : $(x - 4)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b - 4a)x^2 + (c - 4b)x - 4c$

Par identification, on obtient :
$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 4a = -4 \\ c - 4b = -\frac{9}{4} \\ -4c = 9 \end{cases} \quad \text{que l'on résout pour trouver} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -\frac{9}{4} \end{cases}$$

Finalement $P(x) = (x - 4)\left(x^2 - \frac{9}{4}\right)$

3) On doit maintenant résoudre $P(x) = 0$. Or si un produit est nul alors l'un des facteurs est nul. Donc

$$x - 4 = 0 \text{ ou } x^2 - \frac{9}{4} = 0 \text{ ce qui nous donne trois solutions : } S = \left\{4; \frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right\}$$

Exercice 2

1) Q est un polynôme de degré 3 pour que $P + Q$ soit de degré 3

Q est un polynôme de degré 2 avec $a \neq -3$ pour que $P + Q$ soit de degré 2.

Q est un polynôme de la forme $-3x^2 + bx + c$ avec $b \neq 5$ pour que $P + Q$ soit de degré 1.

Q est un polynôme de la forme $-3x^2 + 5x + c$ pour que $P + Q$ soit de degré 0

2) R est un polynôme de degré 3 pour que $P \times R$ soit de degré 5.

R est un polynôme de degré 1 pour que $P \times R$ soit de degré 3.

Il n'existe pas de polynôme R tel que $P \times R$ soit de degré 1.

$R = 0$ pour que $P \times R$ soit de degré 0.

Exercice 3

a) $\Delta = \frac{121}{36}$ donc il y a deux solutions et $S = \left\{\frac{1}{3}; -\frac{3}{2}\right\}$

b) $\Delta = 32$ donc il y a deux solutions et $S = \{-2 - \sqrt{2}; 2 - \sqrt{2}\}$

c) On résout dans $\mathbb{R} - \{1; -2\}$

L'équation est alors équivalente à $(3x + 2)(x + 2) = x(x - 1)$ ou encore $2x^2 + 9x + 4 = 0$.

Le discriminant est $\Delta = 49$ d'où les deux solutions $x_1 = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = -4$.

Comme ce ne sont pas des valeurs interdites, on a $S = \left\{-\frac{1}{2}; -4\right\}$

d) C'est une équation bicarrée. On pose $X = x^2$. On doit donc résoudre $\begin{cases} -4X^2 + 13X - 3 = 0 \\ X \geq 0 \end{cases}$

Pour résoudre l'équation de degré 2, on calcule $\Delta = 121$ d'où les deux valeurs de X :

$$X_1 = \frac{1}{4} \text{ et } X_2 = 3.$$

Comme ces deux valeurs sont positives, on doit ensuite résoudre $x^2 = \frac{1}{4}$ et $x^2 = 3$.

Ce qui nous donne quatre solutions : $S = \left\{\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \sqrt{3}; -\sqrt{3}\right\}$

Exercice 4

On cherche a, b, c, p et q tels que $(x^2 + px + q)(ax^2 + bx + c) = x^4 + px + q$.

On développe le terme de gauche : $ax^4 + (b + pa)x^3 + (c + bp + aq)x^2 + (cp + bq)x + cq$.

Par identification, on a :
$$\begin{cases} a = 1 \\ b + pa = 0 \\ c + pb + aq = 0 \\ cp + bq = p \\ cq = q \end{cases}$$

En remplaçant a par sa valeur, il reste :
$$\begin{cases} b + p = 0 \\ c + pb + q = 0 \\ cp + bq = p \\ cq = q \end{cases}$$

Avec la première équation, on a $b = -p$ et on peut remplacer b par $-p$ dans les autres équations pour obtenir :

$$\begin{cases} c - p^2 + q = 0 \\ cp - pq = p \\ cq = q \end{cases}$$

La dernière équation est équivalente à $cq - q = 0$ ou encore à $(c - 1)q = 0$.

Il y a donc deux cas à étudier : $q = 0$ ou $c - 1 = 0$.

Si $q = 0$: le système devient $\begin{cases} c = p^2 \\ cp = p \end{cases}$ et en remplaçant c par p^2 , on a $p^3 = p$ qui est équivalent à $p^3 - p = 0$. On

factorise par p pour trouver $p(p^2 - 1) = 0$.

Il y a donc trois valeurs possibles pour p : 0, 1 et -1 .

On a alors : pour $p = 0$: $\boxed{x^4 = x^2 \times x^2}$ (on calcule les valeurs de a, b et $c...$)

Pour $p = 1$: $\boxed{x^4 + x = (x^2 + x)(x^2 - x + 1)}$

Pour $p = -1$: $\boxed{x^4 - x = (x^2 - x)(x^2 + x + 1)}$

Si $c - 1 = 0$, autrement dit, si $c = 1$, alors le système devient $\begin{cases} 1 - p^2 + q = 0 \\ p - pq = p \end{cases}$. Cette dernière équation donne $pq = 0$ et comme $q \neq 0$, on a $p = 0$ et aussi $q = -1$ en utilisant la première équation.

Finalement, on a une quatrième possibilité : $\boxed{x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1)}$