Correction devoir maison n°2

Exercice 1

1) $2 \times 0^4 - 9 \times 0^3 + 8 \times 0^2 - 9 \times 9 + 2 = 2 \neq 0$ donc $\boxed{\text{0 n'est pas solution de } (E)}$.

2) On suppose que l'on a une solution de (E) que l'on note x_0, autrement dit :

$2x_0^2 - 9x_0^3 + 8x_0^2 - 9x_0 + 2 = 0$. Comme $x_0 \neq 0$ (car 0 n'est pas solution), on peut diviser par x_0^4 et alors on obtient : $2 - \frac{9}{x_0} + \frac{8}{x_0^2} - \frac{9}{x_0^3} + \frac{2}{x_0^4} = 0$ ce qui signifie que $\frac{1}{x_0}$ est également solution de (E).

Réciproquement, supposons que $\frac{1}{x_0}$ est solution de (E). Alors $\frac{2}{x_0^4} - \frac{9}{x_0^3} + \frac{8}{x_0^2} - \frac{9}{x_0} + 2 = 0$ et en multipliant les deux membres par $x_0^4 \neq 0$, on obtient $2 - 9x_0 + 8x_0^2 - 9x_0^3 + 2x_0^4 = 0$ ce qui signifie que x_0 est solution de (E).

3) $2x^4 - 9x^3 + 8x^2 - 9x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 9x + 8 - \frac{9}{x} + \frac{2}{x^2} = 0$

En divisant chaque membre par $x \neq 0$ sans modifier l'ensemble de solutions.

4) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$

5) On pose $X = x + \frac{1}{x}$ alors

$$2x^2 - 9x + 8 - \frac{9}{x} + \frac{2}{x^2} = 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\right) - 4 - 9\left(x + \frac{1}{x}\right) + 8 = 2X^2 - 9X + 4$$

Et donc si x est solution de (E) alors X est solution de $2X^2 - 9X + 4 = 0$ que l'on note (E_1)

6) Résolvons (E_1) : $\Delta = (-9)^2 - 4 \times 2 \times 4 = 49$ donc l'équation a deux solutions :

$X_1 = \frac{9+7}{4} = 4$ et $X_2 = \frac{9-7}{4} = \frac{1}{2}$.

Pour chacune de ces valeurs, on résout $x + \frac{1}{x} = X$.

Pour X_1 : on résout $x + \frac{1}{x} = 4$ ou encore $x^2 - 4x + 1 = 0$.

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 12$ d'où $x_1 = \frac{4+\sqrt{12}}{2} = \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}$ et $x_2 = \frac{4-\sqrt{12}}{2} = 2 - \sqrt{3}$

Pour X_2 : on résout $x + \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$ ou encore $x^2 - \frac{x}{2} + 1 = 0$.

$\Delta = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -\frac{15}{4}$ donc il n'y a pas de solutions.

Finalement : $\boxed{S = \{2 + \sqrt{3}; 2 - \sqrt{3}\}}$

Exercice 2

Une parabole est la courbe d'un polynôme de degré 2, donc on cherche trois nombres a, b et c tels que $P(x) = ax^2 + bx + c$.

La courbe passe par le point $A(-1; 21)$ donc $P(-1) = 21$ ou encore : $a - b + c = 21$.

La courbe passe par le point $S(2; -6)$ donc $P(2) = -6$ ou encore : $4a + 2b + c = -6$.

Le sommet de la parabole a pour abscisse 2 donc $-\frac{b}{2a} = 2$ ou encore $b = -4a$.

On se retrouve alors avec un système de trois équations à trois inconnues : $\begin{cases} a - b + c = 21 \\ 4a + 2b + c = -6 \\ b = -4a \end{cases}$

En remplaçant b par $-4a$ dans les autres équations, on obtient : $\begin{cases} 5a + c = 21 \\ -4a + c = -6 \end{cases}$

On soustrait membre à membre les deux équations : $5a + c - (-4a + c) = 21 - (-6)$ ou encore $9a = 27$.

On en déduit donc que $a = 3$ d'où $b = -12$ et $c = 6$.

Finalement, le trinôme cherché est : $\boxed{P: x \mapsto 3x^2 - 12x + 6}$

Exercice 3

1) Au bout de $1s$, la balle atteint une hauteur de $\boxed{16{,}6\ m}$ car $h(1) = 16{,}6$.

Au bout de $3s$, la balle atteint la hauteur de $\boxed{16{,}6\ m}$ également car $h(3) = 16{,}6$.

2) La balle est lancée de la hauteur $\boxed{1{,}6\ m}$ car $h(0) = 1{,}6$.

3) Pour trouver à quels instants la balle a une hauteur de $1{,}6\ m$, on doit résoudre $h(t) = 1{,}6$.

Cette équation est équivalente à $-5t^2 + 20t = 0$.

Pour la résoudre, au choix, factorisation ou méthode du discriminant pour trouver $S = \{0; 4\}$ donc $\boxed{\text{la balle a une hauteur de } 1{,}6\ m \text{ au départ et au bout de } 4s}$.

Pour une hauteur de $21{,}6m$, on doit résoudre $h(t) = 21{,}6$ ou encore $-5t^2 + 20t - 20 = 0$.

$\Delta = 0$ donc l'équation a une unique solution $t_0 = -\frac{20}{-10} = 2$.

$\boxed{\text{Donc la balle a une hauteur de } 21{,}6m \text{ au bout de } 2s}$.

Pour une hauteur de $12m$, on résout $-5t^2 + 20t - 10{,}4 = 0$.

$\Delta = 192$ donc il y a deux solutions : $t_1 = \frac{-20+\sqrt{192}}{-10} = \frac{-20+8\sqrt{3}}{-10} = 2 - \frac{4}{5}\sqrt{3}$ et

$t_2 = \frac{-20-\sqrt{192}}{-10} = 2 + \frac{4}{5}\sqrt{3}$

$\boxed{\text{Donc la balle a une hauteur de } 12m \text{ au bout d'environ } 0{,}6s \text{ et au bout d'environ } 3{,}4s.}$

4) La balle retombera au sol lorsque la hauteur sera de $0m$, on résout donc $h(t) = 0$.

$\Delta = 432$ donc il y a deux solutions (dont normalement une seule est positive) : $t_3 = \frac{-20+\sqrt{432}}{-10} = \frac{-20+12\sqrt{3}}{-10} = 2 - \frac{6}{5}\sqrt{3} < 0$ et $t_4 = \frac{-20-\sqrt{432}}{-10} = 2 + \frac{6}{5}\sqrt{3}$.

$\boxed{\text{La balle retombera au sol au bout d'environ } 4{,}1s.}$

5) On doit résoudre $h(t) \geq 16$ ou encore $-5t^2 + 20t - 14{,}4 \geq 0$.

$\Delta = 112$ donc $-5t^2 + 20t - 14{,}4$ est du signe de $a = -5$ sauf entre les racines $t_5 = \frac{-20+\sqrt{112}}{-10} = \frac{-20+4\sqrt{7}}{-10} = 2 - \frac{2}{5}\sqrt{7}$ et $t_6 = \frac{-20-\sqrt{112}}{-10} = 2 + \frac{2}{5}\sqrt{7}$.

$\boxed{\text{Donc la balle est au dessus de } 16m \text{ entre } 0{,}9s \text{ et } 3{,}1\text{s}}$.

6) $-\frac{b}{2a} = -\frac{20}{-10} = 2$ et $h(2) = 21{,}6$.

$\boxed{\text{Au bout de } 2s \text{ la balle est à sa hauteur maximale qui est de } 21{,}6m.}$

Exercice 4

a) $ax^2 + bx + c + \frac{d}{x+2} = \frac{ax^2(x+2)+bx(x+2)+c(x+2)+d}{x+2} = \frac{ax^3+(2a+b)x^2+(2b+c)x+2c+d}{x+2}$

Par identification, on a $\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 2 \\ 2b + c = 2 \\ 2c + d = 0 \end{cases}$ ce qui donne $\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 2 \\ d = -4 \end{cases}$

Donc $\boxed{f(x) = x^2 + 2 - \frac{4}{x+2}}$

b) f est donc la somme de deux fonctions : $g: x \mapsto x^2 + 2$ et $h: x \mapsto -\frac{4}{x+2}$

Sur $[0; +\infty[$: g est une fonction croissante.

Par ailleurs, h est de la forme $v \circ u$ avec $u: x \mapsto x + 2$ suivie de $v: x \mapsto -\frac{4}{x}$.

u est une fonction croissante de $[0; +\infty[$ dans $[2; +\infty[$.

La fonction v est une fonction croissante sur $[2; +\infty[$ (produit de la fonction inverse par un nombre négatif).

Par composition, h est une fonction croissante sur $[0; +\infty[$.

Par addition, $\boxed{f \text{ est une fonction croissante sur } [0; +\infty[}$.