

Correction devoir maison n°4

Exercice 1

$$1) \quad \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}.$$

Ceci montre que les vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires et que les points B, C et M sont alignés.

$$2) \quad \overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} \text{ donc } \overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BM} + \frac{2}{3}\overrightarrow{MC} \text{ ou encore : } \frac{1}{3}\overrightarrow{BM} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CM} = \vec{0}.$$

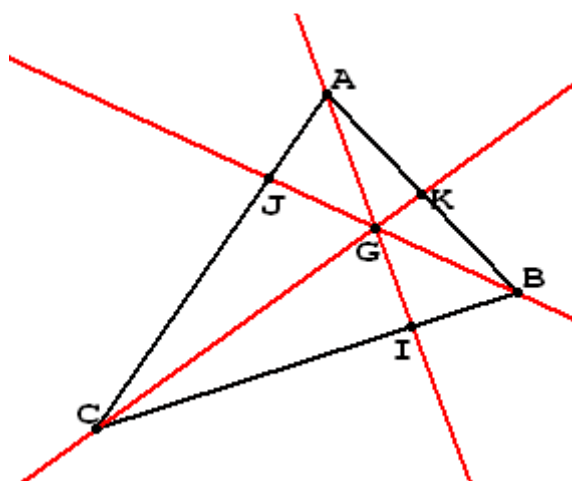
M est donc le barycentre de $(B; \frac{1}{3})$ et $(C; \frac{2}{3})$.

$$3) \quad 3\overrightarrow{BN} + 2\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{BC} \text{ donc } 3\overrightarrow{BN} + 2\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{NC} \text{ ou encore } 2\overrightarrow{BN} + 3\overrightarrow{CN} = \vec{0}.$$

N est donc le barycentre de $(B; 2)$ et $(C; 3)$.

Exercice 2

1)



$$2) \quad 3\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} = \vec{0} \text{ donc } I \text{ est bien le barycentre de } (B; 3) \text{ et } (C; 1).$$

$$3) \quad 3\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{CJ} = 3\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{CJ} = 3\overrightarrow{AC} + 4 \times \frac{3}{4}\overrightarrow{CA} = \vec{0} \text{ donc } J \text{ est bien le barycentre de } (A; 3) \text{ et } (C; 1).$$

4) Comme G est le barycentre de $(A; 3)$, $(B; 3)$ et $(C; 1)$, on peut dire, en utilisant la propriété d'associativité du barycentre, que G est le barycentre de $(A; 3)$ et $(I; 4)$ ce qui signifie que G appartient à la droite (AI) .

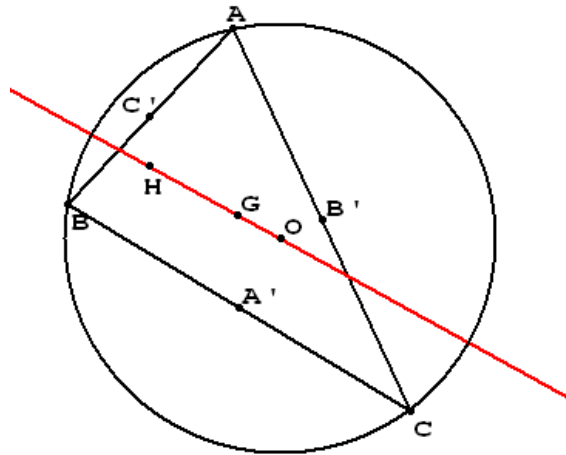
De même, G est aussi le barycentre de $(B; 3)$ et $(J; 4)$ donc G appartient à la droite (BJ) .

D'autre part, comme K est le milieu de $[AB]$, K est le barycentre de $(A; 1)$ et $(B; 1)$ ou encore de $(A; 3)$ et $(B; 3)$. Pour en revenir à G , il est le barycentre de $(K; 6)$ et $(C; 1)$ donc il appartient à (CK) .

Pour finir G appartient aux trois droites (AI) , (BJ) et (CK) qui sont donc concourrantes.

Exercice 3

1)



- 2) $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ or comme A' est le milieu de $[BC]$, autrement dit que A' est le barycentre de $(B; 1)$ et $(C; 1)$, on a $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA'}$ d'où $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$.
- 3) Cette égalité nous montre que les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{OA'}$ sont colinéaires donc les droites (AH) et (OA') sont parallèles.
Par ailleurs, (OA') est la médiatrice du segment $[BC]$ car elle passe par le centre du cercle circonscrit à ABC et par le milieu de $[BC]$ donc elle est perpendiculaire à (BC) . Nous avons donc que la droite (AH) est perpendiculaire à (BC) et passe par le sommet A . C'est la définition de la hauteur issue de A . Donc H appartient à la hauteur issue de A .
- 4) De la même manière, on peut montrer que $\overrightarrow{BH} = 2\overrightarrow{OB'}$ puis que H appartient à la hauteur issue de B puis que $\overrightarrow{CH} = 2\overrightarrow{OC'}$ puis que H appartient à la hauteur issue de C .
 H appartient donc aux trois hauteurs du triangle ABC , c'est l'orthocentre de ABC .
- 5) Comme G est le centre de gravité du triangle ABC , cela signifie que c'est le barycentre de $(A; 1)$, $(B; 1)$ et $(C; 1)$. Donc pour tout point M , on a $3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.
En utilisant cette formule pour $M = O$, on a $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$.
- 6) Ceci nous montre que les vecteurs $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OG}$ sont colinéaires et que les points O, G et H sont alignés.