Correction devoir maison n°6

Exercice 1

1) $f : x \mapsto x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

   a. $f(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 + 3(-2) + 1 = -8 + 3 \times 4 - 6 + 1 = -1 \neq 0$ donc $\boxed{FAUX}$

   b. f est un polynôme donc est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3x^2 + 6x + 3$.

$f'(-1) = 3(-1)^2 + 6(-1) + 3 = 3 - 6 + 3 = 0$ donc $\boxed{VRAI}$

   c. L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1 est $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.

Comme $f(1) = 8$ et $f'(1) = 12$, on a donc $y = 12(x-1) + 8 = 12x - 4$.

L'approximation affine de $f(1+h)$ est donc : $f(1+h) \approx 12(1+h) - 4 = 12 + 12h - 4 = 8 + 12h \neq 0$ donc $\boxed{FAUX}$

   d. L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 est $y = f'(0)(x-0) + f(0)$.

Comme $f(0) = 1$ et $f'(0) = 3$, on a $y = 3x + 1$. $\boxed{VRAI}$

2) $f : x \mapsto \sqrt{2x+1}$.

   a. f est définie sur $[-\frac{1}{2}; +\infty[$ et dérivable sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$.

f est de la forme $u(ax+b)$ avec $u = \sqrt{x}$ et $ax + b = 2x + 1$ et donc $u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$f'(x) = a \times u'(ax+b) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$ donc $\boxed{FAUX}$

   b. $f'(0) = \frac{1}{\sqrt{2\times 0+1}} = \frac{1}{1} = 1$ donc $\boxed{VRAI}$

   c. L' équation de la tangente à la courbe de f au pont d'abscisse 0 est $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

Comme $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$, on a $y = x$.

L'approximation affine de $f(h)$ pour h proche de 0 est donc $f(h) \approx h$ donc $\boxed{VRAI}$

   d. L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $\frac{3}{2}$ est $y = f'\left(\frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right)$.

Comme $f\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{2 \times \frac{3}{2} + 1} = \sqrt{4} = 2$ et $f'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}$, on a $y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right) + 2 = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} + \frac{8}{4} = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$ donc $\boxed{VRAI}$

Exercice 2

1) f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \{2\}$.

f est de la forme $u + v$ avec $u = ax + b$ et $v = \frac{c}{x-2}$.

Pour déterminer v', on a besoin de la dérivée de $x \mapsto \frac{1}{x-2}$ de la forme $\frac{1}{w}$ avec $w = x - 2$.

Donc $v' = c \times \left(-\frac{w'}{w^2}\right) = -\frac{c}{(x-2)^2}$

On trouve donc $\boxed{f'(x) = a - \frac{c}{(x-2)^2}}$

2) La courbe de f passe par $A(1; 2)$ donc $f(1) = 2$ d'où $a + b + \frac{c}{-1} = 2$ ou encore $\boxed{a + b - c = 2}$

La tangente à la courbe de f au point d'abscisse -1 a pour équation $y = 8x - 2$ donc son coefficient directeur est 8 et $f'(-1) = 8$ mais en plus le point de tangence est $B(-1; 8 \times (-1) - 2)$ donc $B(-1; -10)$ ce qui signifie que $f(-1) = -10$.

$f'(-1) = -8$ donne : $a - \frac{c}{(-3)^2} = -8$ ou encore $\boxed{9a - c = -72}$.

$f(-1) = -10$ donne $-a + b + \frac{c}{-3} = -10$ ou encore $\boxed{3a - 3b + c = 30}$.

Finalement, on a un système de trois équations à trois inconnues : $\begin{cases} a + b - c = 2 \\ 9a - c = 72 \\ 3a - 3b + c = 30 \end{cases}$.

Grâce à la deuxième équation : $c = 9a - 72$.

On remplace dans les deux autres équations pour obtenir : $\begin{cases} c = 9a - 72 \\ -8a + b = -70 \\ 12a - 3b = 102 \end{cases}$

Grâce à la seconde équation : $b = 8a - 70$.

On remplace dans la dernière équation pour obtenir : $\begin{cases} c = 9a - 72 \\ b = 8a - 70 \\ -12a = -108 \end{cases}$ et donc $\boxed{\begin{cases} c = 9 \\ b = 2 \\ a = 9 \end{cases}}$.

La fonction f est donc $\boxed{x \mapsto 9x + 2 + \frac{9}{x-2}}$

Exercice 3

1) Si $a = -1$ et $b = 2$, on a $A(-1; 1)$; $B(2; 4)$.

   a. Pour la figure :

I le milieu de $[AB]$ a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$.

La fonction $f: x \mapsto x^2$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x$.

L'équation de la tangente à la courbe de f, donc à $\wp$, au point d'abscisse -1 a pour équation $y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$ et comme $f(-1) = 1$ et $f'(-1) = -2$, on a $y = -2(x+1) + 1 = -2x - 1$.

La tangente à $\wp$ au point B a pour équation $y = f'(2)(x-2) + f(2) = 4(x-2) + 4 = 4x - 4$.

Pour déterminer les coordonnées du point J, on doit résoudre le système : $\begin{cases} y = -2x - 1 \\ y = 4x - 4 \end{cases}$.

Or ce système est équivalent à $\begin{cases} y = -2x - 1 \\ -2x - 1 = 4x - 4 \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} y = -2 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$ donc $J\left(\frac{1}{2}; -2\right)$.

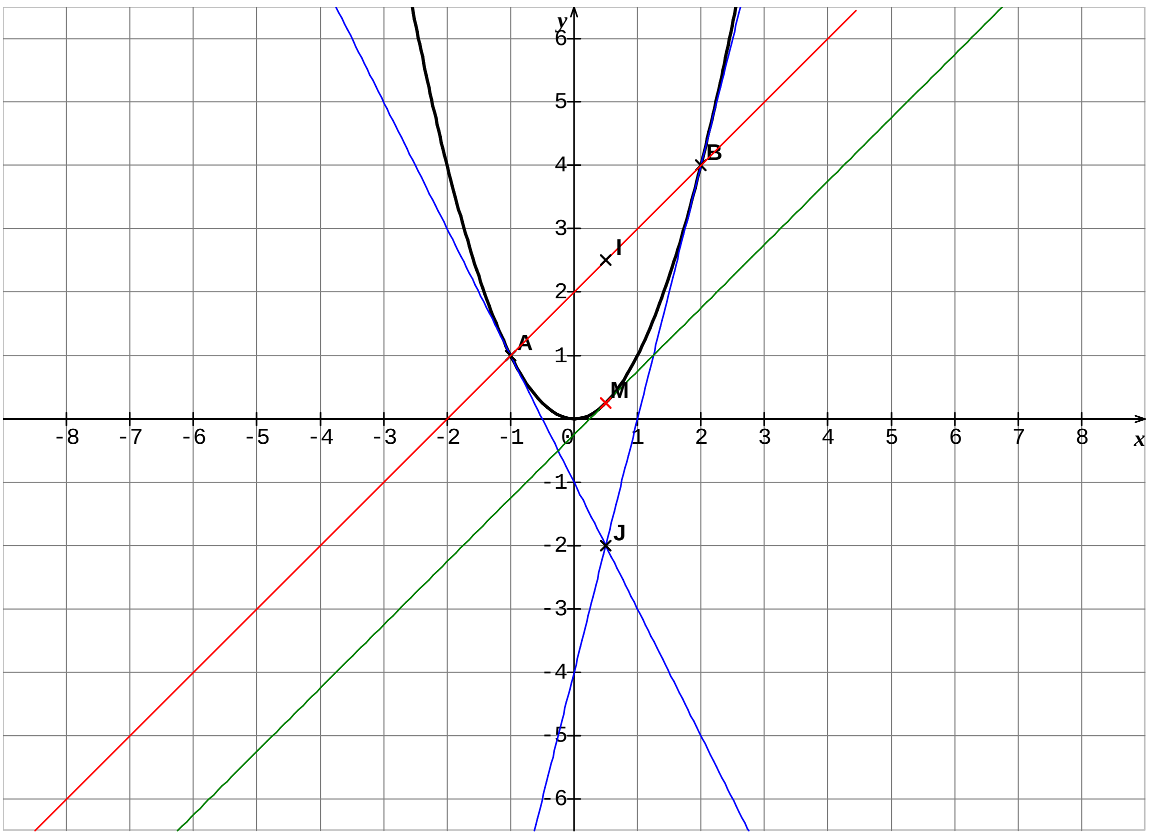
M est le milieu de $[IJ]$ donc $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$.

   b. $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ donc les coordonnées de M vérifient l'équation de $\wp$ et alors $\boxed{M \in \wp}$

   c. L'équation de la tangente à la courbe de f au point M a pour équation $y = 1\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} = x - \frac{1}{4}$.

La droite (AB) a pour coefficient directeur $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3}{3} = 1$.

$\boxed{\text{La tangente à } \wp \text{ en } M \text{ et la droite } (AB) \text{ ont le même coefficient directeur donc sont parallèles.}}$



2) $A(a;a^2)$ et $B(b;b^2)$

a. I est le milieu de $[AB]$ donc $x_I = \frac{x_A+x_B}{2} = \frac{a+b}{2}$ et $y_I = \frac{y_A+y_B}{2} = \frac{a^2+b^2}{2}$ $\boxed{I\left(\frac{a+b}{2};\frac{a^2+b^2}{2}\right)}$

b. La tangente à $\wp$ au point d'abscisse a a pour équation : $y = f'(a)(x-a)+f(a)$ donc $y = 2a(x-a)+a^2$ et en développant : $\boxed{T_A : y = 2ax - a^2}$

De la même manière pour B, on trouve $\boxed{T_B : y = 2bx - b^2}$

c. Pour les coordonnées de J, on doit résoudre le système $\begin{cases} y = 2ax - a^2 \\ y = 2bx - b^2 \end{cases}$

Ce système est équivalent à $\begin{cases} y = 2ax - a^2 \\ 2ax - a^2 = 2bx - b^2 \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} y = 2ax - a^2 \\ x = \frac{a^2-b^2}{2a-2b} \end{cases}$

En factorisant le numérateur et le dénominateur de x et en simplifiant par $a-b$, on obtient : $\begin{cases} y = \frac{2a(a+b)}{2} - a^2 \\ x = \frac{a+b}{2} \end{cases}$

En simplifiant l'écriture de y, on a $\boxed{J\left(\frac{a+b}{2};ab\right)}$

M est le milieu de $[IJ]$ donc $x_M = \frac{x_I+x_J}{2} = \frac{a+b}{2}$ et $y_M = \frac{y_I+y_J}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{a^2+b^2}{2}+ab\right] = \frac{1}{2}\times\frac{a^2+b^2+2ab}{2} = \frac{(a+b)^2}{4}$

Donc $\boxed{M\left(\frac{a+b}{2};\frac{(a+b)^2}{4}\right)}$

d. $x_M^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(a+b)^2}{4} = y_M$ donc les coordonnées de M vérifient l'équation de $\wp$ donc $\boxed{M \in \wp}$

e. Le coefficient directeur de la tangente à $\wp$ en M est $2x_M = \frac{2(a+b)}{2} = a+b$.

Le coefficient directeur de la droite (AB) est $\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B} = \frac{a^2-b^2}{a-b} = \frac{(a-b)(a+b)}{a-b} = a+b$.

Les coefficients directeurs sont égaux donc $\boxed{\text{la tangente à } \wp \text{ en } M \text{ est parallèle à } (AB).}$