Correction devoir maison n°7

Exercice 1

1) f est une fonction polynôme donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 2x - 6$

L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est de la forme $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

D'où $y = (2a-6)(x-a) + a^2 - 6x + 7$.

En développant, on trouve $y = (2a-6)x - a^2 + 7$

2) La tangente T_a passe par $A(1;c)$ si et seulement si les coordonnées de A vérifient l'équation de T_a, autrement dit : $c = (2a-6) \times 1 - a^2 + 7$

En développant, on obtient : $a^2 - 2a + c - 1 = 0$.

Le discriminant est $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (c-1) = 4 - 4c + 4 = 8 - 4c$.

Si $\Delta > 0$, autrement dit si $8 - 4c > 0$, ou encore si $c < 2$, alors l'équation admet deux solutions distinctes et il existe deux tangentes différentes passant par A.

Si $\Delta = 0$, autrement dit si $c = 2$, alors l'équation admet une unique solution et il existe une seule tangente passant par A.

Si $\Delta < 0$, autrement dit si $c > 2$, alors l'équation n'admet pas de solution et il n'existe pas de tangente passant par A.

Exercice 2

1) $f(x) = x + \frac{1}{x+a}$ est de la forme $u + v$ avec $u = x$ et $v = \frac{1}{w}$ et $w = x + a$

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{-a\}$ et $f'(x) = u' - \frac{w'}{w^2} = 1 - \frac{1}{(x+a)^2} = \frac{(x+a)^2 - 1}{(x+a)^2} = \frac{(x+a+1)(x+a-1)}{(x+a)^2}$

x	$-\infty$		$-a-1$		$-a$		$-a+1$		$+\infty$
Signe de $x+a+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Signe de $x+a-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $(x+a)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
Signede $f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
Variations de f		$\nearrow$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$		$\nearrow$	

Donc f admet un maximum local en $-a-1$ et un minimum local en $-a+1$

D'où $M = f(-a-1) = -a - 1 + \frac{1}{-a-1+a} = -a - 2$ et $m = f(-a+1) = -a + 1 + \frac{1}{-a+1+a} = -a + 2$.

2) $M = 2m$ devient $-a - 2 = 2(-a+2)$ ou encore $a = 6$.

Exercice 3

Ensemble de définition de f : on doit avoir $(3-x)(1+x) \geq 0$.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
Signe de $3-x$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $1+x$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $(3-x)(1+x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $D_f = [-1;3]$.

f est de la forme uv avec $u = \sqrt{3-x}$ et $v = \sqrt{1+x}$. On a u de la forme $w(ax+b)$ et v de la forme $w(cx+d)$ avec $w = \sqrt{x}$; $ax + b = -x + 3$ et $cx + d = x + 1$

Donc f est dérivable sur $]-1;3[$ et

$$f'(x) = u'v + uv' = -1 \times \frac{1}{2\sqrt{3-x}} \times \sqrt{1+x} + 1 \times \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \times \sqrt{3-x} = \frac{-(1+x)+(3-x)}{2\sqrt{(3-x)(1+x)}}$$

$$f'(x) = \frac{2-2x}{2\sqrt{(3-x)(1+x)}}$$

Le dénominateur de $f'(x)$ est clairement positif donc $f'(x)$ est du signe de $2-2x$.

x	-1		1		3
Signe de $f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$
Variation de f	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0