Correction devoir maison n°9

Exercice 1

1) Pour l'équation $\sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)=\frac{1}{2}$ dans $[-\pi;\pi]$: on pose $X=\frac{\pi}{3}-2x$.

On doit chercher à quel intervalle appartient X : comme $-\pi \leq x \leq \pi$, on a $-2\pi \leq -2x \leq 2\pi$ et donc $-2\pi+\frac{\pi}{3} \leq X \leq 2\pi+\frac{\pi}{3}$ ce qui donne $-\frac{5\pi}{3} \leq X \leq \frac{7\pi}{3}$.

On doit donc résoudre l'équation $\sin(X)=\frac{1}{2}$ dans l'intervalle $\left[-\frac{5\pi}{3};\frac{7\pi}{3}\right]$.

Cette équation a quatre solutions d'après le cercle trigonométrique : $S=\left\{-\frac{7\pi}{6};\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6};\frac{13\pi}{6}\right\}$.

A chacune de ces valeurs de X correspond une valeur de x que l'on trouve en résolvant l'équation $\frac{\pi}{3}-2x=X$.

$$\frac{\pi}{3}-2x=-\frac{7\pi}{6} \qquad -2x=-\frac{9\pi}{6} \qquad x=\frac{3\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{3}-2x=\frac{\pi}{6} \qquad -2x=-\frac{\pi}{6} \qquad x=\frac{\pi}{12}$$

$$\frac{\pi}{3}-2x=\frac{5\pi}{6} \qquad -2x=\frac{3\pi}{6} \qquad x=-\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{3}-2x=\frac{13\pi}{6} \qquad -2x=\frac{11\pi}{6} \qquad x=-\frac{11\pi}{12}$$

On a donc $\boxed{S=\left\{\frac{3\pi}{4};\frac{\pi}{12};-\frac{\pi}{4};-\frac{11\pi}{12}\right\}}$ (il est recommandé de tracer sur la calculatrice la courbe de la fonction $x \mapsto \sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)$ sur $[-\pi;\pi]$ et de vérifier que les solutions trouvées…)

Pour l'inéquation $\sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)>\frac{1}{2}$: on raisonne de la même manière que précédemment et on trouve que $X \in \left[-\frac{5\pi}{3};-\frac{7\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{13\pi}{6};\frac{7\pi}{3}\right]$. On doit donc résoudre trois inéquations :

$$-\frac{5\pi}{3} \leq \frac{\pi}{3}-2x < -\frac{7\pi}{6} \qquad -2\pi \leq -2x < -\frac{9\pi}{6} \qquad \pi \geq x > \frac{3\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{3}-2x < \frac{5\pi}{6} \qquad -\frac{\pi}{6} < -2x < \frac{3\pi}{6} \qquad \frac{\pi}{12} > x > -\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{13\pi}{6} < \frac{\pi}{3}-2x \leq \frac{7\pi}{3} \qquad \frac{11\pi}{6} < -2x \leq 2\pi \qquad -\frac{11\pi}{12} > x \geq -\pi$$

Finalement $\boxed{S=\left[-\pi;-\frac{11\pi}{12}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{12}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{4};\pi\right]}$

2)

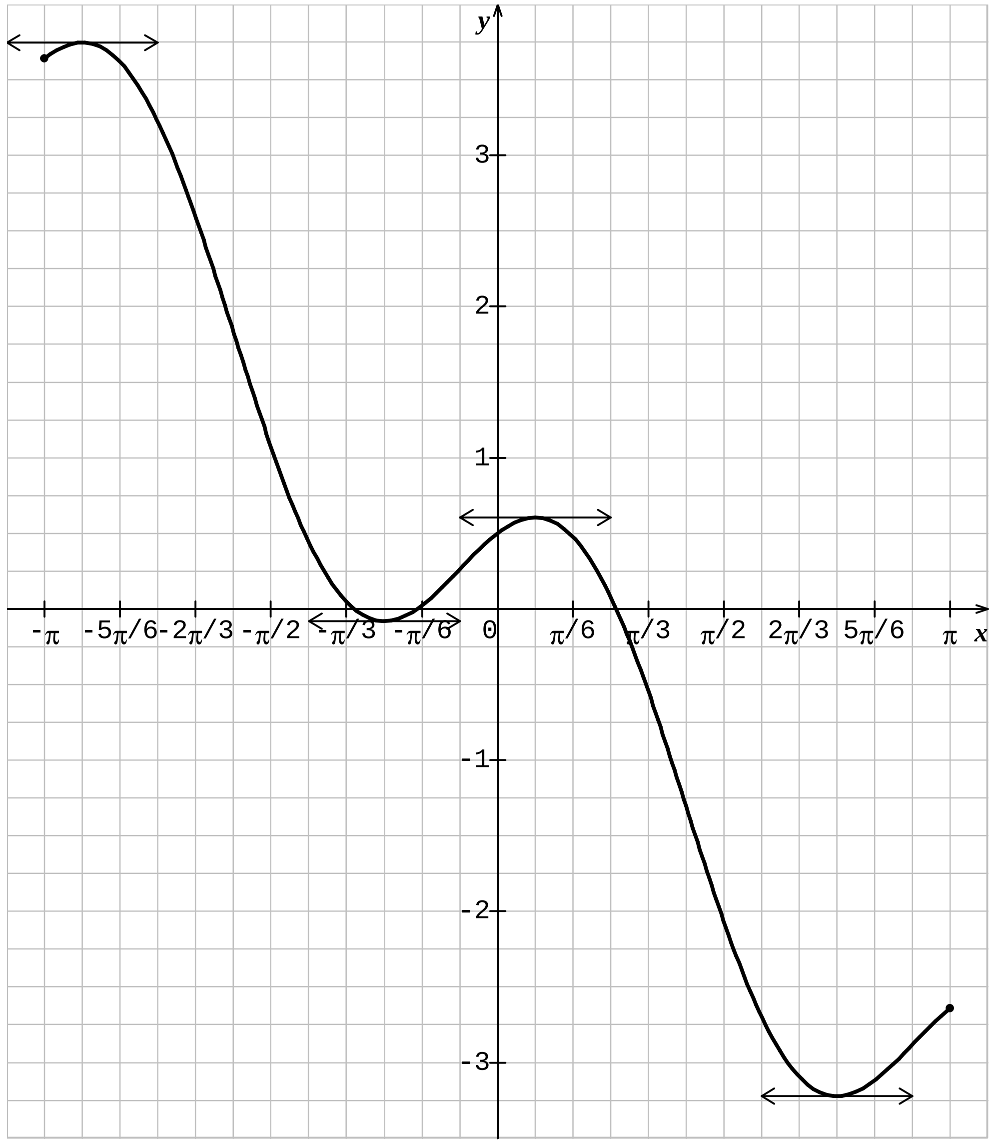
a. f est de la forme $u(ax+b)-x$ avec $u=\cos(x)$ et $ax+b=-2x+\frac{\pi}{3}$ donc f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc à fortiori sur $[-\pi;\pi]$. De plus $f'(x)=a\times u'(ax+b)-1$, ce qui donne donc :

$$\boxed{f'(x)=-2\times\left(-\sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)\right)-1=2\sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)-1}$$

b. L'inéquation $f'(x)>0$ a été résolu à la question précédente. On peut donc établir le tableau de variations de f :

x	$-\pi$		$-\frac{11\pi}{12}$		$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{12}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	$\frac{1}{2}+\pi$	↗	$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{11\pi}{12}$	↘	$-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{4}$	↗	$\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{12}$	↘	$-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3\pi}{4}$	↗	$\frac{1}{2}-\pi$

c. Et voici la courbe :



Exercice 2

1) $\cos(x) = \cos(2x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x + 2\pi \times k \\ x = -2x + 2\pi \times k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

En effet, deux nombres ont le même cosinus s'ils représentent le même point sur le cercle trigonométrique ou s'ils représentent des points symétriques par rapport à l'axe des abscisses (et donc les nombres sont opposés à un certain nombre de tours près).

Pour la première équation : $x = -2\pi \times k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Cette équation nous fournit donc deux solutions dans $[0; 2\pi]$: pour $k = 0$, $x = 0$ et pour $k = -1$, $x = 2\pi$.

Pour la seconde équation : $x = \frac{2\pi}{3} \times k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Cette équation nous fournit donc trois solutions dans $[0; 2\pi]$: pour $k = 0$, $x = 0$; pour $k = 1$, $x = \frac{2\pi}{3}$ et pour $k = 2$, $x = \frac{4\pi}{3}$.

Finalement il y a quatre solutions à cette équation : $\boxed{S = \left\{0; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; 2\pi\right\}}$

2) f est de la forme $u(ax + b) + v(cx + d)$ où $u = 2\cos(x)$, $ax + b = x + \frac{\pi}{2}$; $v = \sin(x)$ et $cx + d = 2x$.

Donc $f'(x) = a \times u'(ax + b) + c \times v'(cx + d) = -2\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 2\cos(2x)$.

En utilisant la formule $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$, on est ramené à $\boxed{f'(x) = 2(\cos(2x) - \cos(x))}$.

3) Pour étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0; 2\pi]$, on cherche le signe de $\cos(2x) - \cos(x)$. On sait déjà les points où cela s'annule grâce à la question 1 et il reste à trouver le signe entre chacune des ces valeurs. On peut par exemple, calculer des images par f' de certains nombres. On peut ainsi calculer $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 > 0$.

Dans tous les cas, on trouve le tableau de signes et de variations suivants :

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{3}$		2π
Signe de $f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
Variations de f	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	0

Exercice 3

1) C'est une équation du second degré, on calcule donc le discriminant :

$$\Delta = \left(2(\sqrt{2}-1)\right)^2 - 4 \times 4 \times (-\sqrt{2}) = 4(2 - 2\sqrt{2} + 1) + 16\sqrt{2} = 4(2 + 2\sqrt{2} + 1) = 4(\sqrt{2}+1)^2 > 0$$

Donc l'équation a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-2(\sqrt{2}-1) - 2(\sqrt{2}+1)}{8} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2(\sqrt{2}-1) + 2(\sqrt{2}+1)}{8} = \frac{1}{2}$$

Finalement $\boxed{S = \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{1}{2}\right\}}$.

2) On pose $X = \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$. Alors $4X^2 + 2(\sqrt{2}-1)X - \sqrt{2} = 0$. On est ramené à l'équation de la question précédente. Il y a donc deux valeurs possibles pour X : $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{1}{2}$.

Pour $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$: on pose $Y = 3x + \frac{\pi}{3}$ et comme $x \in [0; \pi]$, on a $3x \in [0; 3\pi]$ et $Y \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{10\pi}{3}\right]$.

D'après le cercle trigonométrique, il y a trois solutions à l'équation $\sin(Y) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$: $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$ et $\frac{13\pi}{4}$.

On calcule les valeurs de x correspondantes :

$$3x + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{4} \qquad 3x + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{4} \qquad 3x + \frac{\pi}{3} = \frac{13\pi}{4}$$
$$3x = \frac{11\pi}{12} \qquad 3x = \frac{17\pi}{12} \qquad 3x = \frac{35\pi}{12}$$
$$x = \frac{11\pi}{36} \qquad x = \frac{17\pi}{36} \qquad x = \frac{35\pi}{36}$$

Pour $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$: on fait de même et on doit résoudre $\sin(Y) = \frac{1}{2}$ dans $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{10\pi}{3}\right]$.

On trouve trois solutions grâce au cercle trigonométrique : $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{13\pi}{6}$ et $\frac{17\pi}{6}$.

On calcule les valeurs de x correspondantes :

$$3x + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} \qquad 3x + \frac{\pi}{3} = \frac{13\pi}{6} \qquad 3x + \frac{\pi}{3} = \frac{17\pi}{6}$$
$$3x = \frac{3\pi}{6} \qquad 3x = \frac{11\pi}{6} \qquad 3x = \frac{15\pi}{6}$$
$$x = \frac{\pi}{6} \qquad x = \frac{11\pi}{18} \qquad x = \frac{5\pi}{6}$$

Finalement l'équation a six solutions : $\boxed{S = \left\{\frac{11\pi}{36} ; \frac{17\pi}{36} ; \frac{35\pi}{36} ; \frac{\pi}{6} ; \frac{11\pi}{18} ; \frac{5\pi}{6}\right\}}$