Correction devoir surveillé n°10

Exercice 1

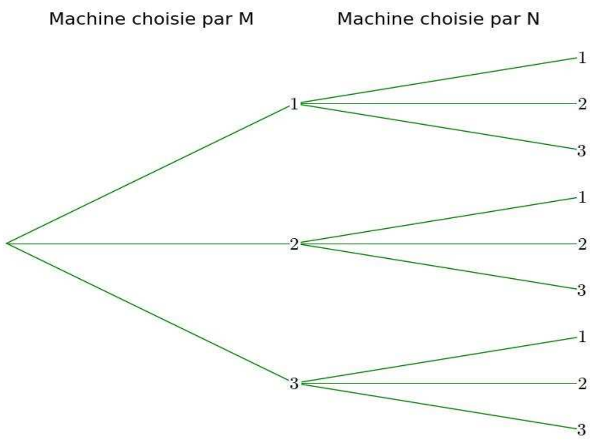
La somme de toutes les probabilités sont égales à 1 donc $x + y = 0{,}4$.
Par ailleurs, le calcul de l'espérance donne : $E(x) = -2 \times 0{,}2 - 1 \times x + 0 \times 0{,}3 + 1 \times y + 2 \times 0{,}1 = -x + y - 0{,}2$
Donc $E(x) = 0 \Leftrightarrow -x + y = 0{,}2$.
On a donc le système : $\begin{cases} x + y = 0{,}4 \\ -x + y = 0{,}2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 0{,}6 \\ -x + y = 0{,}2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0{,}3 \\ x = 0{,}1 \end{cases}$.
D'où $\boxed{x = 0{,}1 \text{ et } y = 0{,}3}$

Exercice 2

1) On peut représenter toutes les issues soit par un tableau, soit par un arbre :

Dans le tableau, la première ligne indique la machine choisie par M et la première colonne indique la machine choisie par N. On note qu'il y a $\boxed{\text{9 cas possibles}}$, tous équiprobables. On retrouve ces 9 cas avec l'arbre.

	1	2	3
1	$B\,;C$		C
2		$A\,;B$	
3	C		$B\,;C$



2) Il n'y a qu'un cas où seul l'appareil 2 a été utilisé donc $\boxed{p(A) = \frac{1}{9}}$

Pour l'événement B, soit l'appareil 1 est utilisé par M et par N, soit c'est l'appareil 2, soit c'est l'appareil 3. Ceci correspond donc à trois cas d'où $\boxed{p(B) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}}$

Pour l'événement C, on compte 4 cas où l'appareil 2 n'a pas été utilisé. On a donc $\boxed{p(C) = \frac{4}{9}}$.

3) Les événements A et C ne sont pas contraires car $p(A) + p(C) \neq 1$.

Remarque : le contraire de l'événement A est : « Au moins un des deux appareils 1 ou 3 a été utilisé. »

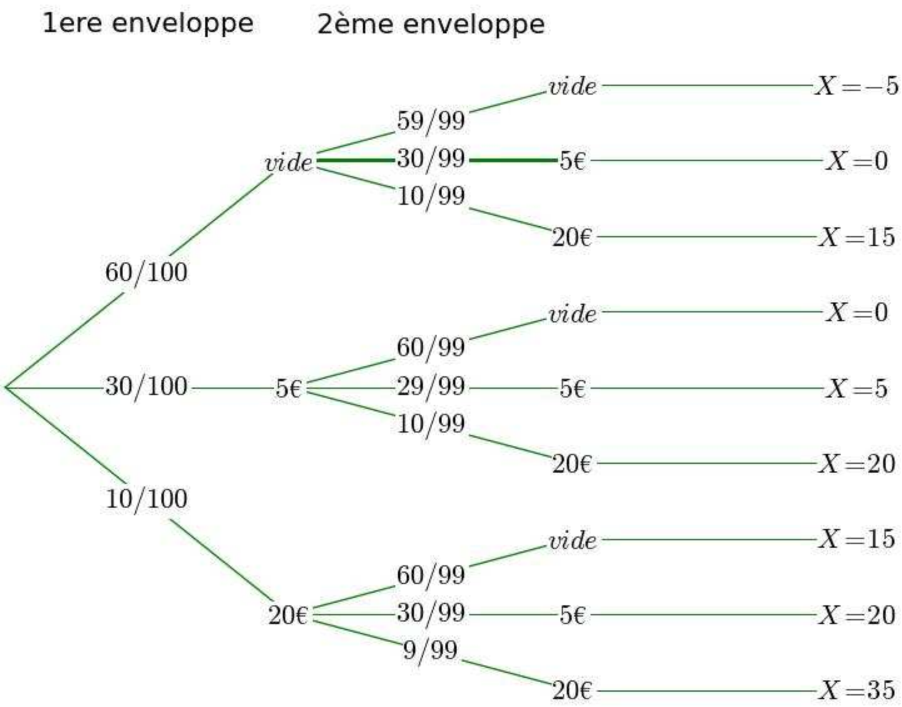
Exercice 3

1) Il y a 100 possibilités pour la première enveloppe et 99 pour la seconde enveloppe. Cela nous fait donc $100 \times 99 = \boxed{9900 \text{ tirages possibles}}$. On fait l'hypothèse que tous les tirages sont équiprobables.

2) Pour gagner 40€, il faut tirer deux enveloppes avec 20€. Pour la première enveloppe tirée, on a 10 possibilités et pour la seconde enveloppe tirée, il n'y a plus que 9 possibilités. On a donc $\boxed{p(40€) = \frac{90}{9900} = \frac{1}{110}}$.

Pour ne rien gagner, il faut tirer deux enveloppes vides. Pour la première, on a 60 possibilités et pour la seconde, il ne reste que 59 possibilités. On a donc $\boxed{p(0€) = \frac{60 \times 59}{9900} = \frac{59}{165}}$.

3) On peut utiliser un arbre avec les probabilités, ou réfléchir à toutes les possibilités :



a. La variable aléatoire X peut donc prendre les valeurs : $\boxed{-5\,;0\,;5\,;15\,;20\,;35}$.

b. Pour établir la loi de probabilité, on peut soit utiliser l'arbre précédent en multipliant les probabilités de chaque branche, soit réfléchir au nombre de possibilités de chaque cas.

Par exemple, pour la valeur $X = 15$: on gagne 15€ si la première enveloppe tirée est vide et si la seconde contient 20€ ou inversement.

Pour le 1er cas, on a 60 possibilités pour le premier tirage et 10 pour le second. On a donc une probabilité de $\frac{60\times10}{9900} = \frac{2}{33}$ que cela se produise.

Pour le 2ème cas, c'est exactement la même chose avec la même probabilité. On a donc $p(X = 15) = \frac{4}{33}$.

On peut ainsi remplir le tableau :

Valeur de X	-5	0	5	15	20	35
probabilité	$\frac{3540}{9900} = \frac{59}{165}$	$\frac{3600}{9900} = \frac{4}{11}$	$\frac{870}{9900} = \frac{29}{330}$	$\frac{1200}{9900} = \frac{4}{33}$	$\frac{600}{9900} = \frac{2}{33}$	$\frac{90}{9900} = \frac{1}{110}$

c. $E(X) = -5\times\frac{59}{165} + 0\times\frac{4}{11} + 5\times\frac{29}{330} + 15\times\frac{4}{33} + 20\times\frac{2}{33} + 35\times\frac{1}{110} = \boxed{2}$

$$V(X) = (-5)^2\times\frac{59}{165} + 0^2\times\frac{4}{11} + 5^2\times\frac{29}{330} + 15^2\times\frac{4}{33} + 20^2\times\frac{2}{33} + 35^2\times\frac{1}{110} - 2^2 = \frac{730500}{9900} - 4 = \frac{690900}{9900} = \frac{2303}{33}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{2303}{33}} = \boxed{\frac{7\sqrt{1551}}{33}}$$

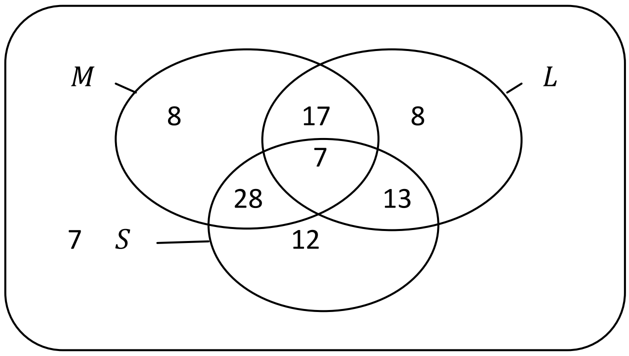
Pour une partie, le gain final moyen est de 2€ (la mise étant comptabilisée) ce qui représente 40% de l'investissement… Pour comparer, le livret A rapporte en moyenne 2% par an de votre investissement. Il vaut donc mieux jouer et même beaucoup !!

Exercice 4

1) Pour le diagramme, il y a trois ensembles : M pour la musique, L pour la lecture et S pour le sport.

Grâce à l'énoncé, on peut placer les valeurs 7, 8, 13 et 28. On en déduit ensuite le sport seul : $60 - 7 - 13 - 28 =$

12 puis la lecture et la musique seule $45-7-13-8=17$, la musique seule $60-7-28-17=8$ et enfin tous les autres : $100-(8+28+7+17+8+13+12)=7$.



2) Il n'y a plus qu'à lire le diagramme :

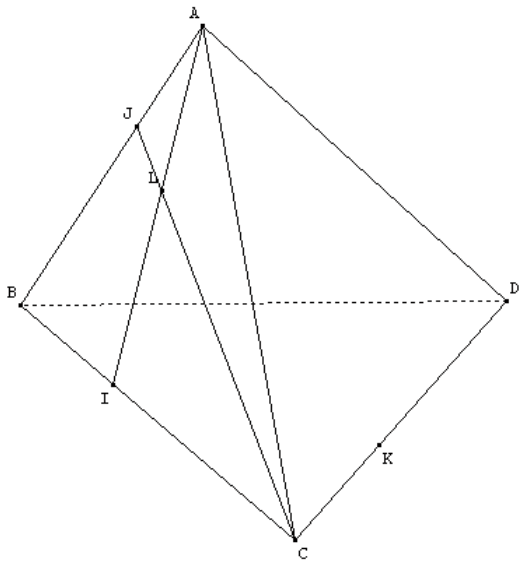
a. $p(M \cap L) = \frac{17}{100} + \frac{7}{100} = \frac{24}{100} = \boxed{\frac{6}{25}}$

b. $p(M \cup S) = \frac{8+17+7+28+12+13}{100} = \boxed{\frac{17}{20}}$

c. $p(\bar{M} \cap S) = \frac{12+13}{100} = \boxed{\frac{1}{4}}$

d. $p(\bar{M} \cap \bar{L} \cap \bar{S}) = \boxed{\frac{7}{100}}$

Exercice 5



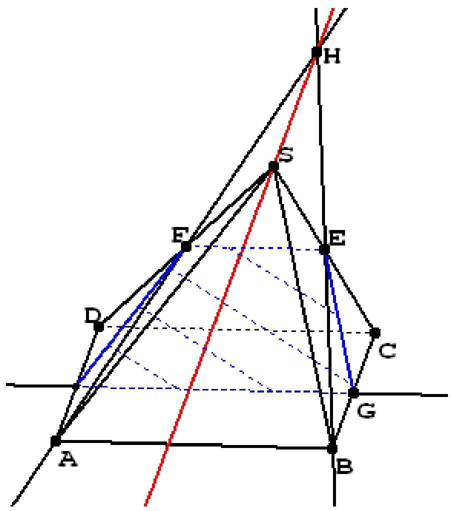
a) $\boxed{(JK) \text{ et } (BD) \text{ ne sont pas coplanaires}}$ car le point J n'appartient pas au plan (BCD) contrairement aux points B, D et K.

b) La droite (CJ) et le plan (AIK) sont sécants en L avec L l'intersection des droites (CJ) et (AI) qui sont contenues, toutes deux, dans le plan (ABC).

c) La droite (AK) et le plan (CJD) sont sécants en K.

d) Les plans (AIJ) et (CKJ) sont sécants en (CJ). En effet, le plan (AIJ) est confondu avec le plan (ABC) donc les points C et J appartiennent à ce plan. Par ailleurs, C et J appartiennent aussi au plan (CKJ).

Exercice 6



1) Voir la figure ci-contre

2) Dans le parallélogramme $ABCD$, les droites (AB) et (CD) sont parallèles. Par ailleurs, dans le triangle SCD, E est le milieu de $[SC]$, F est le milieu de $[SD]$ donc la droite (EF) passe par le milieu de deux côtés et donc est parallèle au troisième côté, donc à (CD). On en conclut donc que (AB) et (EF) sont parallèles.

3) Comme (AB) et (EF) sont parallèles, on peut déjà dire que (AF) et (BE) sont coplanaires. Par ailleurs, à l'aide du théorème des milieux (ou le théorème de Thalès), on montre que $EF = \frac{1}{2}CD$ or $CD = AB$ donc $EF = \frac{1}{2}AB$. Donc $AEFB$ n'est pas un parallélogramme et (AF) et (BE) ne sont pas parallèles. On a donc (AF) et (BE) sécantes. Notons H l'intersection de ces deux droites.

4) Le point S est bien evidemment commun aux plans (SBC) et (SAD). De plus, ces plans sont distincts donc ils sont sécants. Il faut donc déterminer un autre point de la droite d'intersection. Or H appartient à (AF) donc au plan (SAD) et H appartient aussi à (EB) donc à (SBC). Finalement, l'intersection de (SBC) et (SAD) est la droite (SH).

Remarque : on pouvait aussi raisonner en utilisant le théorème du toit et montrer que la droite d'intersection entre les deux plans est la parallèle à (BC) et (AD) passant par S.

5) Le point G appartient clairement aux plans (EFG) et (ABC).

Par ailleurs, les droites (AB) et (EF) sont parallèles. En utilisant le théorème du toit, la droite d'intersection des plans (ABC) et (EFG) est parallèle également aux droites (AB) et (EF). L'intersection de (ABC) et (EFG) est donc la droite passant par G et parallèle à (AB).

6) Voir la figure.