625

# *Correction devoir surveillé n°1*

**Exercice 1**

a) On résout dans $\mathbb{R} - \{2\}$.

L'équation est alors équivalente à $\frac{6+7(x-2)}{x-2} = \frac{(1-4x)(x-2)}{x-2}$ ou encore à $7x - 8 = -4x^2 + 9x - 2$.

En regroupant tout dans le même membre, on a $4x^2 - 2x - 6 = 0$.

On calcule le discriminant $\Delta = 100$ d'où les deux solutions : $x_1 = \frac{2+10}{8} = \frac{3}{2}$ et $x_2 = \frac{2-10}{8} = -1$.

Finalement $\boxed{S = \left\{-1; \frac{3}{2}\right\}}$

b) On résout dans $\mathbb{R} - \{-1\}$.

L'inéquation est équivalente à $\frac{(3x-7)(x+1)+9}{x+1} \leq 0$ ou encore $\frac{3x^2-4x+2}{x+1} \leq 0$.

Pour le signe du numérateur : $\Delta = -8$ donc $3x^2 - 4x + 2$ est toujours du signe de $a = 3$.

Pour le dénominateur, la valeur annulante est $-1$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $3x^2 - 4x + 2$ | | $+$ | \| | $+$ | |
| Signe de $x + 1$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| Signe de $\frac{3x^2-4x+2}{x+1}$ | | $-$ | \|\| | $+$ | |

On a donc $\boxed{S = ]-\infty; -1[}$

**Exercice 2**

En observant le signe de $a$, on peut déjà voir que les courbes des polynômes $g$ et $h$ sont les courbes $C_1$ et $C_2$ et les courbes de $f$ et $k$ sont $C_3$ et $C_4$.

Pour $g$ et $h$ : on vérifie facilement que 0 est racine $h$ or la seule courbe qui coupe l'axe des abscisses en 0 est la courbe $C_1$. Donc $\boxed{\text{la courbe de } h \text{ est } C_1 \text{ et la courbe de } g \text{ est } C_2}$.

Pour $f$ et $k$ : on observe qu'un des deux discriminants doit être égal à 0 (pour $C_4$) et que l'autre doit être négatif (pour $C_3$). Calculons le discriminant de $f$ : $\Delta_f = 6^2 - 4 \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times (-6) = 36 - \frac{72}{2} = 0$.

Donc $\boxed{\text{la courbe de } f \text{ est } C_4 \text{ et la courbe de } k \text{ est } C_3}$.

**Exercice 3**

1) $P(x) = -2x^3 + 11x^2 - 12x - 9$

   a. $P(3) = -2 \times 3^3 + 11 \times 3^2 - 12 \times 3 - 9 = -54 + 99 - 36 - 9 = 0$ donc 3 est bien une racine de $P$.

   b. D'après la question précédente, le polynôme $P$ se factorise par $(x-3)$ donc il existe $a, b$ et $c$ tels que $P(x) = (x-3)(ax^2 + bx + c)$.

En développant le membre de droite, on a $ax^3 + (b - 3a)x^2 + (c - 3b)x - 3c$ et par identification :

$$\begin{cases} a = -2 \\ b - 3a = 11 \\ c - 3b = -12 \\ -3c = -9 \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} a = -2 \\ b = 5 \\ c = 3 \end{cases}$$

La factorisation de $P$ est donc $\boxed{P(x) = (x-3)(-2x^2 + 5x + 3)}$.

2) Pour étudier la position relative des courbes représentatives des fonctions $f$ et $g$, on doit étudier le signe de $f(x) - g(x)$.

$f(x) - g(x) = 5x^2 - 12x - 5 - (2x^3 - 6x^2 + 4) = -2x^3 + 11x^2 - 12x - 9$
On reconnaît l'expression de $P$ d'où : $f(x) - g(x) = P(x) = (x-3)(-2x^2 + 5x + 3)$.
Pour le signe de $x - 3$, la valeur annulante est 3.
Pour le signe de $-2x^2 + 5x + 3$, on calcule $\Delta = 49$ donc $-2x^2 + 5x + 3$ est du signe de $a = -2$ sauf entre les racines $x_1 = \frac{-5-7}{-4} = 3$ et $x_2 = \frac{-5+7}{-4} = -\frac{1}{2}$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $x-3$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| Signe de $-2x^2+5x+3$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |
| Signe de $f(x)-g(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | $\Vert$ | $-$ | |

Donc pour $x \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$, la courbe de $f$ est au dessus de la courbe de $g$.
Pour $x \in \left[\frac{1}{2}; 3\right[ \cup ]3; +\infty[$, la courbe de $f$ est en dessous de la courbe de $g$.

**Exercice 4**

1) $x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$

De même $x_1 x_2 = \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$

2) Applications :

   a. La somme des racines est égale à $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$ et le produit $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{4}{3}$.

   b. $(-1)^2 + 3 \times (-1) + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$ donc $-1$ est bien racine de $P_2$.

Pour trouver l'autre racine, on utilise que la somme des deux racines est égale à $-\frac{b}{a} = -3$ donc la seconde racine est $\boxed{-2}$.

   c. On veut que $-1$ soit racine de $2x^2 + x - m = 0$ donc $2 \times (-1)^2 + (-1) - m = 0$ et alors $m = 1$. L'équation est $2x^2 + x - 1 = 0$.

Pour la seconde solution, on utilise que la somme des deux solutions est $-\frac{b}{a} = -\frac{1}{2}$ donc la seconde solution est $\frac{1}{2}$. Finalement $\boxed{S = \left\{-1; \frac{1}{2}\right\}}$