Correction devoir surveillé n°3

Exercice 1

1) D'après les graduations $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ donc $3\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}$ ou encore : $2\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BH} = \vec{0}$.

$\boxed{H \text{ est donc le barycentre de } (A;2) \text{ et } (B;1)}$ avec $2+1 \neq 0$.

2) D'après les graduations, $\overrightarrow{CK} = \frac{5}{6}\overrightarrow{CD}$ donc $6\overrightarrow{CK} = 5\left(\overrightarrow{CK} + \overrightarrow{KD}\right)$ ou encore $\overrightarrow{CK} + 5\overrightarrow{DK} = \vec{0}$.

$\boxed{K \text{ est donc le barycentre de } (C;1) \text{ et } (D;5)}$ avec $1+5 \neq 0$.

3) D'après les graduations, $\overrightarrow{KE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{KH}$ donc de la même manière qu'à la question 1, E est le barycentre de $(K;2)$ et $(H;1)$ donc de $(K;6)$ et $(H;3)$.

H est le barycentre de $(A;2)$ et $(B;1)$; la somme des coefficients est 3.
K est le barycentre de $(C;1)$ et $(D;5)$; la somme des coefficients est 6.
E est le barycentre de $(H;3)$ et $(K;6)$ donc par associativité du barycentre,
$\boxed{E \text{ est le barycentre de } (A;2), (B;1), (C;1) \text{ et } (D;5).}$

Exercice 2

1) Par définition du barycentre : $2\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$.

Ceci donne : $2\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{BC}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont donc colinéaires et $\boxed{\text{les droites } (AG) \text{ et } (BC) \text{ sont parallèles}}$.

2) $x_G = \frac{ax_A+bx_B+cx_C}{a+b+c} = \frac{(2\times 0-3-2)}{2} = -\frac{5}{2}$ et $y_G = \frac{ay_A+by_B+cy_C}{a+b+c} = \frac{2\times 2-5-4}{2} = -\frac{5}{2}$.

On a donc : $\boxed{G\left(-\frac{5}{2};-\frac{5}{2}\right)}$.

3) $M_m(m;m^2)$

   a. M_m appartient à (AB) si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM_m}$ sont colinéaires. Calculons les coordonnées de ces vecteurs :

$\overrightarrow{AB}\binom{3}{3}$ et $\overrightarrow{AM_m}\binom{m}{m^2-2}$
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM_m}$ colinéaires $\Leftrightarrow 3(m^2-2) = 3m \Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0$
On résout cette équation de degré 2 : $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4\times(-2) = 9$ donc l'équation a deux solutions : $m_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+3}{2} = 2$ et $m_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-3}{2} = -1$.
Finalement $\boxed{M_m \text{ appartient à } (AB) \text{ pour } m \in \{-1;2\}}$

   b. Pour $m = -1$:

$\overrightarrow{AM_{-1}}$ a pour coordonnées $\binom{-1}{-1}$ donc $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AM_{-1}}$.
On obtient donc $\overrightarrow{AM_{-1}} + \overrightarrow{M_{-1}B} + 3\overrightarrow{AM_{-1}} = \vec{0}$ ou encore $4\overrightarrow{AM_{-1}} - \overrightarrow{BM_{-1}} = \vec{0}$.
Donc $\boxed{M_{-1} \text{ est le barycentre de } (A;4) \text{ et } (B;-1)}$ avec $4-1 \neq 0$.
Pour $m = 2$: $\overrightarrow{AM_2}$ a pour coordonnées $\binom{2}{2}$ donc $3\overrightarrow{AM_2} = 2\overrightarrow{AB}$.
On obtient donc $3\overrightarrow{AM_2} - 2\overrightarrow{AM_2} - 2\overrightarrow{M_2B} = \vec{0}$ ou encore $\overrightarrow{AM_2} + 2\overrightarrow{BM_2} = \vec{0}$.
Donc $\boxed{M_2 \text{ est le barycentre de } (A;1) \text{ et } (B;2)}$ avec $1+2 \neq 0$.

Exercice 3

1) K est le barycentre de $(C;1)$ et $(B;-4)$ donc : $\overrightarrow{CK} - 4\overrightarrow{BK} = \vec{0}$.

Ceci est équivalent à $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BK} - 4\overrightarrow{BK} = \vec{0}$ ou encore $\overrightarrow{CB} + 3\overrightarrow{KB} = \vec{0}$.

Donc $\boxed{B \text{ est le barycentre de } (C;1) \text{ et } (K;3).}$

2) On a :

B est le barycentre de $(C;1)$ et $(K;3)$; la somme des coefficients est 4.

J est le barycentre de $(A;1)$ et $(B;2)$ donc de $(A;2)$ et $(B;4)$.

Par associativité du barycentre, $\boxed{J \text{ est le barycentre de } (A;2), (C;1) \text{ et } (K;3).}$

3) I es le barycentre de $(A;2)$ et $(C;1)$.

J est le barycentre de $(A;2)$, $(C;1)$ et $(K;3)$.

Donc par associativité du barycentre, J est le barycentre de $(I;2+1)$ et de $(K;3)$.

Autrement dit, J est l'isobarycentre de I et K donc $\boxed{J \text{ est le milieu de } [IK]}$.