Correction devoir surveillé n°4

Exercice 1

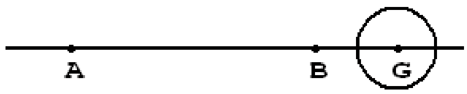
On considère le barycentre G de $(A;1)$ et $(B;-4)$ qui existe car $1-4 \neq 0$.

On a alors, pour tout point M du plan : $\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} = -3\overrightarrow{MG}$.

$$\|\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB}\| = 3 \Leftrightarrow \|-3\overrightarrow{MG}\| = 3 \Leftrightarrow 3MG = 3 \Leftrightarrow MG = 1$$

Donc l'ensemble des points M cherchés est le cercle de centre G et de rayon 1.

Pour placer G : $\overrightarrow{AG} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$



Exercice 2

Pour f : la fonction f est de la forme uv avec $u = v = \sin x$ donc est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = u'v + uv' = \cos x \times \sin x + \sin x \times \cos x = 2\sin x \cos\ x$$

Pour g : la fonction g est de la forme $u(ax+b)$ avec $u = \sqrt{x}$ et $ax+b = 2x-3$ donc g est dérivable sur $]\frac{3}{2};+\infty[$ et $g'(x) = a \times u'(ax+b) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{2x-3}} = \frac{1}{\sqrt{2x-3}}$

Exercice 3

1) f est définie quand $9 - x^2 \geq 0$ donc quand $x^2 \leq 9$. Autrement dit $D_f = [-3;3]$.
2) $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\sqrt{9-h^2}-3}{h} = \frac{(\sqrt{9-h^2}-3)(\sqrt{9-h^2}+3)}{h(\sqrt{9-h^2}+3)} = \frac{9-h^2-9}{h(\sqrt{9-h^2}+3)} = -\frac{h}{\sqrt{9-h^2}+3}$

Quand h prend des valeurs très proches de 0, alors ce taux de variations a des valeurs très proche de 0 donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Exercice 4

1) P est un polynôme donc est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
$P'(x) = 3x^2 - 3$ P' est du signe de $a = 3$ sauf entre les racines $x_1 = -1$ et $x_2 = 1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $P'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de P		$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	

2) $P(-2) = -8+6+1 = -1$; $P(-1) = 3$ et P est strictement croissante sur $[-2;-1]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $P(x) = 0$ a une solution unique dans $[-2;-1]$.

$P(-1{,}9) \approx -0{,}16$ et $P(-1{,}8) \approx 0{,}57$

$P(-1{,}88) \approx -0{,}005$ et $P(-1{,}87) \approx 0{,}07$ donc $-1{,}88 < \alpha < -1{,}87$

3) $P(2) = 3$

Comme à la question précédente, on peut montrer que l'équation $P(x) = 0$ a une unique solution dans $[-1;1]$ et une autre dans $[1;2]$.

Sur $]-\infty;-2]$, la fonction P est strictement croissante et son maximum est $P(-2) = -1$ donc l'équation $P(x) = 0$ n'a pas de solution dans $]-\infty;-2]$.

De la même manière, on démontre que $P(x) = 0$ n'a pas de solutions dans $[2;+\infty[$.

Au final, l'équation $P(x) = 0$ a trois solutions dans $\mathbb{R}$.

Exercice 5

1) $f'(2)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2 donc $f'(2) = 3$.

A l'abscisse 2, le point de la tangente T à la courbe de f est confondu avec le point de la courbe de f donc $f(2) = 3 \times 2 - 1 = 5$.

2) $f(2+h) \approx f'(2)h + f(2) \approx 3h + 5$

On pouvait aussi trouver le résultat avec : $f(2+h) \approx 3 \times (2+h) - 1$…

3) $f(1{,}997) = f(2 - 0{,}003) \approx 3 \times 0{,}003 + 5 \approx 5{,}009$.

Exercice 6

1) $g : x \mapsto 2x^3 - 3x^2 - 4$

a. $g'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de g		$\nearrow$	-4	$\searrow$	-5	$\nearrow$	

b. $g(2) = 2 \times 8 - 3 \times 4 - 4 = 0$

c. Pour le signe, on regarde le tableau de variation :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	

2) f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u = 1 - x$ et $v = 4 + x^3$ donc $u' = -1$ et $v' = 3x^2$.

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{-(4 + x^3) - 3x^2(1-x)}{(4+x^3)^2} = \frac{2x^3 - 3x^2 - 4}{(4+x^3)^2} = \frac{g(x)}{(4+x^3)^2}$$

3) Le dénominateur de $f'(x)$ est strictement positif sur $[-1; +\infty[$, donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$:

x	-1		2		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variation de f	$\frac{2}{3}$	$\searrow$	$-\frac{1}{12}$	$\nearrow$	

4) L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 est $y = f'(0)x + f(0)$ donc

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4} = \frac{1-x}{4}$$

5) $\frac{1-x}{4+x^3} - \frac{1-x}{4} = (1-x)\left[\frac{4}{4(4+x^3)} - \frac{4+x^3}{4(4+x^3)}\right] = \frac{-(1-x)x^3}{4(4+x^3)}$

Pour réaliser un tableau de signe, on étudie le signe de chaque facteur :

Pour $-(1-x) = x - 1$: cela s'annule en 1 .

Pour x^3 : c'est du même signe que x.

Pour $4 + x^3$: sur $[-1; +\infty[$, c'est toujours strictement positif car $x \geq -1$ donc $x^3 \geq (-1)^3$ car la fonction cube est croissante et donc $4 + x^3 \geq 3$.

x	-1		0		1		$+\infty$
Signe de $x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de x^3		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $4(4+x^3)$		$+$		$+$		$+$	
Signe de $\frac{1-x}{4+x^3} - \frac{1-x}{4}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a donc sur $[-1; 0] \cup [1; +\infty[$: la courbe de f est au dessus de la tangente T et sur $[0; 1]$, la courbe de f est en dessous de T.