Correction devoir surveillé n°5

Exercice 1

1) $\frac{13\pi}{12}-\frac{\pi}{2}=\frac{13\pi}{12}-\frac{6\pi}{12}=\frac{7\pi}{12}$ et $\frac{13\pi}{12}+\frac{\pi}{2}=\frac{13\pi}{12}+\frac{6\pi}{12}=\frac{19\pi}{12}$
2) $\frac{13\pi}{12}\in\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$ donc $\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)<0$

De plus, $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ pour tout réel x donc $\cos^2\left(\frac{13\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{13\pi}{12}\right)=1$ et donc

$$\cos^2\left(\frac{13\pi}{12}\right)=1-\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right)^2=1-\frac{2-2\sqrt{12}+6}{16}=\frac{16-\left(8-2\sqrt{12}\right)}{16}=\frac{8+2\times2\sqrt{3}}{16}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

D'où : $\boxed{\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}$

3) $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{13\pi}{12}-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

$\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{13\pi}{12}-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

$\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{13\pi}{12}+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)=-\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

$\sin\left(\frac{19\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{13\pi}{12}+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

Exercice 2

1) $r=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et θ est tel que $\begin{cases}\cos(\theta)=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin(\theta)=-\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ d'où $\theta=-\frac{3\pi}{4}\ (2\pi)$

Finalement $\boxed{A\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{3\pi}{4}\right)}$

2)

a. $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}\right)=\left(\overrightarrow{OB};\vec{\imath}\right)+\left(\vec{\imath};\overrightarrow{OC}\right)\ (2\pi)$ d'où $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}\right)=-\frac{2\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\ (2\pi)$ ou encore

$\boxed{\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}\right)=\frac{\pi}{2}\ (2\pi)}$ Remarque : on peut donc dire que (OB) et (OC) sont perpendiculaires.

b. $x_B=4\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-2$ et $y_B=4\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=2\sqrt{3}$ donc $\boxed{B\left(-2;2\sqrt{3}\right)}$

$x_C=3\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ et $y_C=3\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{3}{2}$ donc $\boxed{C\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2};-\frac{3}{2}\right)}$

c. Pour calculer la distance BC, on peut au choix, calculer la norme du vecteur $\overrightarrow{BC}$ ou utiliser le fait que le triangle OBC soit rectangle en O (voir la question précédente) et utiliser le théorème de Pythagore. On trouve ainsi : $BC^2=3^2+4^2=25$ et donc $\boxed{BC=5}$

Exercice 3

$\left(\overrightarrow{3u};-4\vec{v}\right)=(\vec{u};-\vec{v})\quad(2\pi)$
$\quad=(\vec{u};\vec{v})+\pi\quad(2\pi)$

$\boxed{(3\vec{u};-4\vec{v})=\alpha+\pi\ (2\pi)}$

$(2\vec{v};\vec{u})+2(\vec{u};-3\vec{v})$
$\quad=(\vec{v};\vec{u})+2\left((\vec{u};\vec{v})+\pi\right)\quad(2\pi)$
$\quad=-(\vec{u};\vec{v})+2(\vec{u};\vec{v})+2\pi\quad(2\pi)$

$\boxed{(2\vec{v};\vec{u})+2(\vec{u};-3\vec{v})=\alpha\quad(2\pi)}$

$(\vec{u};-\vec{v})-(-\vec{u};-\vec{v})$
$=(\vec{u};\vec{v})+\pi-(\vec{u};\vec{v})\quad(2\pi)$

$\boxed{(\vec{u};-\vec{v})-(-\vec{u};-\vec{v})=\pi\quad(2\pi)}$

Exercice 4

$\cos(x) = \frac{(\sqrt{2}-2\sqrt{2})}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x \in [0; 2\pi]$ donc $\boxed{S = \left\{\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right\}}$

$\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = -\frac{1}{2}$ donc $\frac{\pi}{3} - 2x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k$ ou $\frac{\pi}{3} - 2x = \frac{11\pi}{6} + 2\pi k$

Autrement dit : $x = -\frac{5\pi}{12} + \pi k$ ou $x = -\frac{3\pi}{4} + \pi k$

On ne considère que les solutions dans $[0; 2\pi]$ donc $\boxed{S = \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{12}; \frac{5\pi}{4}; \frac{19\pi}{12}\right\}}$

$\sin(x) < \frac{3}{\sqrt{12}}$ or $\frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\sin(x) < \frac{\sqrt{3}}{2}$ et donc $\boxed{S = \left[0; \frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{6}; 2\pi\right]}$

Exercice 5

$(\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DE}) = (\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{DE}) \quad (2\pi)$ grâce à la relation de Chasles

$= (\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{CB}) - (\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) + \pi \quad (2\pi)$ car $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires et de sens contraire

$= \frac{\pi}{3} - \frac{3\pi}{4} + \pi \quad (2\pi)$

$= \frac{4\pi - 9\pi + 12\pi}{12} \quad (2\pi)$

Donc $\boxed{(\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DE}) = \frac{7\pi}{12} \quad (2\pi)}$

Exercice 6

1) $(\overrightarrow{IC}; \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{AB}) \ (2\pi)$

Donc $(\overrightarrow{IC}; \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}) + \pi \quad (2\pi)$ ou encore $\boxed{(\overrightarrow{IC}; \overrightarrow{AB}) = \frac{4\pi}{3} \quad (2\pi)}$

2) Dans un premier temps, on peut remarquer que C appartient à cet ensemble…

$(\overrightarrow{IM}; \overrightarrow{AB}) = -\frac{2\pi}{3} \ (2\pi)$ donc $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{IM}) = \frac{2\pi}{3} \ (2\pi)$

Comme $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{IM}) = (-\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{IM}) \ (2\pi)$, on en déduit $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{IM}) = \frac{5\pi}{3} \quad (2\pi)$ ou encore $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{IM}) = -\frac{\pi}{3} \quad (2\pi)$.

L'ensemble des points M cherché est donc la demi-droite $[IC)$, en excluant I.