Devoir surveillé n°6

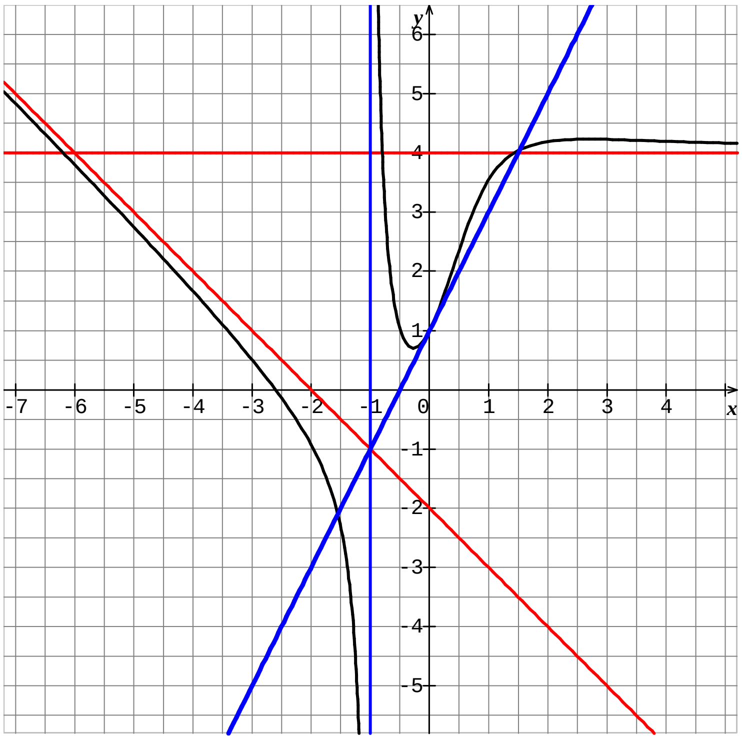
Exercice 1

Dans chaque cas, calculer la limite de la fonction f en a.

1) $f(x) = -6x^5 + 3x^2 - 1$ avec $a = +\infty$
2) $f(x) = -3x^2 - 1 + \frac{3}{x}$ avec $a = -\infty$
3) $f(x) = 7x - 3 + 5x^2$ avec $a = -1$

Exercice 2

On considère une fonction f dont la courbe représentative est donnée ci-contre.



Lire graphiquement :

1) $f(0)$
2) $f'(0)$
3) La limite de f en $+\infty$
4) La limite de f en $-\infty$
5) La limite de f en -1 avec $x < -1$
6) Les équations des asymptotes à la courbe de f

Exercice 3

Calculer en donnant tous les détails du calcul :

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-x^2 + 3x + 4}{x + 1}$$

Exercice 4

Partie A

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^3 + 3x^2 + x - 5$.

1) Calculer $P(1)$. En déduire une factorisation de P.
2) Etudier le signe de $P(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par $f(x) = \frac{x^3+3x^2+5x+5}{(x+1)^2}$ et on note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Déterminer a, b, c et d tels que, pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ $f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{(x+1)^2}$.
2) Calculer la limite de f en -1. En déduire que C_f admet une asymptote D. Préciser l'équation de D.
3) Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
4) Calculer la dérivée de f et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$, on a $f'(x) = \frac{P(x)}{(x+1)^3}$.
5) Déduire des questions précédentes le tableau de variations complet de f.
6) Montrer que la droite Δ d'équation $y = x + 1$ est une asymptote oblique à C_f en $+\infty$ et en $-\infty$. Etudier la position relative de C_f et de Δ.
7) Déterminer les coordonnées du point A, intersection de C_f et de Δ.
8) Déterminer l'équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse -2.
9) Dans un repère orthonormé (unités : 1cm en abscisse et 1cm en ordonnée), tracer D, Δ, T et enfin C_f.