Correction devoir surveillé n°7

Exercice 1

Calcul direct ou avec projeté… On pouvait aussi définir un repère et utiliser les coordonnées.

a. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = AB \times CD \times \cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}) = 5 \times 3 \times \cos(\pi) = \boxed{-15}$

b. $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}).\overrightarrow{AD} = AD^2 + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AD} = 4^2 + 0 = \boxed{16}$ car (AD) et (CD) perpendiculaires.

c. $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}).(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{DC} + AD^2 + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DC} = 0 + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + 4^2 + 0$

Donc : $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC} = -15 + 16 = \boxed{1}$

d. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC} = 0 - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \boxed{15}$

e. $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}).(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC} = -4 + 0 + 0 + 15 = \boxed{11}$

Exercice 2

1) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left[\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\|^2\right] = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$

Or $AB^2 = 4$; $AC^2 = (3\sqrt{2} - \sqrt{6})^2 = 18 - 6\sqrt{12} + 6 = 24 - 12\sqrt{3}$ et

$BC^2 = 4(\sqrt{3} - 1)^2 = 4(3 - 2\sqrt{3} + 1) = 16 - 8\sqrt{3}$

D'où $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(4 + 24 - 12\sqrt{3} - 16 + 8\sqrt{3}) = \frac{1}{2}(12 - 4\sqrt{3})$ et donc $\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 6 - 2\sqrt{3}}$

De même, $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}[BA^2 + BC^2 - AC^2] = \frac{1}{2}(4 + 16 - 8\sqrt{3} - 24 + 12\sqrt{3}) = \frac{1}{2}(-4 + 4\sqrt{3})$ et donc

$\boxed{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = -2 + 2\sqrt{3}}$

2) En utilisant la formule du produit scalaire avec cosinus : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\hat{A})$ d'où $\cos(\hat{A}) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB \times AC}$

On a donc : $\cos(\hat{A}) = \frac{6-2\sqrt{3}}{2(3\sqrt{2}-\sqrt{6})} = \frac{(6-2\sqrt{3})(3\sqrt{2}+\sqrt{6})}{2(18-6)} = \frac{18\sqrt{2}+6\sqrt{6}-6\sqrt{6}-2\sqrt{18}}{24} = \frac{18\sqrt{2}-6\sqrt{2}}{24} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

On en déduit : $\boxed{\hat{A} = \frac{\pi}{4}}$

On effectue le même calcul avec l'autre produit scalaire : $\cos(\hat{B}) = \frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{BA \times BC} = \frac{-2+2\sqrt{3}}{2\times 2(\sqrt{3}-1)} = \frac{1}{2}$ et donc $\boxed{\hat{B} = \frac{\pi}{3}}$.

On peut enfin calculer le troisième angle : $\hat{C} = \pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}$ et donc $\boxed{\hat{C} = \frac{5\pi}{12}}$

Exercice 3

1) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{AI}$ car comme I est le milieu de $[CD]$, on a $\overrightarrow{IC} = -\overrightarrow{ID}$.

2) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AE} = AC \times AE \times \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = 3 \times 4 \times \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 12\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et donc $\boxed{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AE} = -6\sqrt{2}}$

3) $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}).(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE})$

Or $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA} = 0$ car $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont orthogonaux, $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} = -AB \times AD \times \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 6\sqrt{2}$ et

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE} = 0$ car les vecteurs sont orthogonaux.

D'où $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}(0 - 6\sqrt{2} + 6\sqrt{2} + 0) = 0$.

Ceci montre que les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont orthogonaux et donc que les droites $\boxed{(AI) \text{ et } (BE) \text{ sont perpendiculaires.}}$