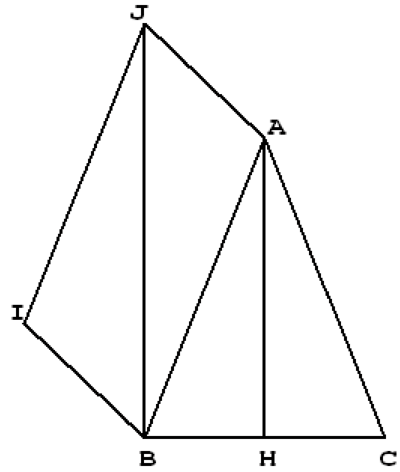
Correction devoir surveillé n°8

Exercice 1



1) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BH}$ car H est le projeté orthogonal de A sur (BC). De plus, H est le milieu de $[BC]$ car dans un triangle ABC isocèle en A, la hauteur issue de A est également la médiatrice de $[BC]$.

D'où $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = BC \times BH \times \cos(0) = 4 \times 2 = \boxed{8}$.

2) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{JC} = \overrightarrow{BC}.\left(\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{BC}\right) = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{JB} + BC^2$

Or (BC) et (AH) sont perpendiculaires et (AH) et (BJ) sont parallèles donc (BC) et (BJ) sont perpendiculaires et donc $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{JB} = 0$.

On en déduit : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{JC} = BC^2 = \boxed{16}$

3) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{BC}.\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ}\right) = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BJ} = -\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} + 0 = \boxed{-8}$

Exercice 2

1) On considère un point M du plan :

$MA^2 + MB^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 = MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + IA^2 + MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + IB^2$

Or $2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{MI}.\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) = 2\overrightarrow{MI}.\vec{0} = 0$ car I est le milieu de $[AB]$.

Et par ailleurs, $IA = IB = \frac{1}{2}AB$ d'où $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 2 \times \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 = 2MI^2 + \frac{2}{4}AB^2$

Et donc $\boxed{MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2}$

2) $MA^2 + MB^2 = 36 \Leftrightarrow 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2 = 36 \Leftrightarrow MI^2 = \frac{1}{2}\left(36 - \frac{1}{2} \times 6^2\right) \Leftrightarrow MI^2 = 9 \Leftrightarrow MI = 3$

Donc l'ensemble des points cherchés est le cercle de centre I et de rayon 3.

Exercice 3

1) $x^2 + y^2 + 2x - y = 5$

$x^2 + 2x + 1 + y^2 - y + \frac{1}{4} = 5 + 1 + \frac{1}{4}$

$(x+1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$

$\boxed{C_1 \text{ est donc le cercle de centre } B\left(-1;\frac{1}{2}\right) \text{ et de rayon } \frac{5}{2}}$

2) Le cercle C_2 a pour centre $A(4;3)$ et pour rayon 5. Une équation est : $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$ ou encore, en développant : $\boxed{x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0}$

3) Pour déterminer les coordonnées des points d'intersection de C_1 et C_2, on résout le système :

$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - y = 5 \\ x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - y = 5 \\ 10x + 5y = 5 \end{cases}$ en soustrayant les deux équations.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (1-2x)^2 + 2x - (1-2x) = 5 \\ y = 1 - 2x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 = 5 \\ y = 1 - 2x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$

On obtient donc $\boxed{E(-1;3) \text{ et } F(1;-1)}$

4) Le cercle C_2 a pour centre $A(4;3)$. La tangente à C_2 en F est la perpendiculaire à (AF) passant par F.
On considère un point $M(x;y)$ appartenant à cette tangente T_2. Alors $\overrightarrow{FM}$ et $\overrightarrow{FA}$ sont orthogonaux et leur produit scalaire est nul. Or $\overrightarrow{FM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FA}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{FM}.\overrightarrow{FA} = 0 \Leftrightarrow 3(x-1) + 4(y+1) = 0 \Leftrightarrow \boxed{3x + 4y + 1 = 0}$

5) Une droite d'équation $ax + by + c = 0$ admet le vecteur $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ pour vecteur directeur.

Le vecteur $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ dirige donc T_1 et le vecteur $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ dirige T_2.
$\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = -3 \times (-4) + (-4) \times 3 = 0$ donc $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont orthogonaux et les droites T_1 et T_2 sont perpendiculaires.

Exercice 4

1) Dans le triangle ABC, on utilise la relation d'Al Kashi : $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \times \cos(\hat{B})$

D'où : $1{,}2^2 = 1^2 + 0{,}8^2 - 2 \times 1 \times 0{,}8 \times \cos(\hat{B})$

$\cos(\hat{B}) = 0{,}125$ et donc $\boxed{\hat{B} \approx 82{,}8°}$

2) $A_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times BC \times \sin(\hat{B})$ or $\cos(\hat{B}) = 0{,}125 = \frac{1}{8}$ et $\cos^2(\hat{B}) + \sin^2(\hat{B}) = 1$ d'où $\sin^2(\hat{B}) = 1 - \left(\frac{1}{8}\right)^2$ et

donc $\sin^2(\hat{B}) = \frac{63}{64}$. De plus, comme $\hat{B} \in [0; 90]$, $\sin(\hat{B}) > 0$ donc $\sin(\hat{B}) = \sqrt{\frac{63}{64}} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$

On a donc : $A_{ABC} = \frac{1}{2} \times 1 \times 0{,}8 \times \frac{3\sqrt{7}}{8} = \frac{3\sqrt{7}}{16} \times \frac{4}{5} = \boxed{\frac{3\sqrt{7}}{20}}$

Exercice 5

Calcul de la longueur BC : le bateau avance à $24 km.h^{-1}$ pendant $20\ min$, c'est-à-dire $\frac{1}{3} h$.

La distance BC est donc de $8\ km$ car $\frac{1}{3} \times 24 = 8$.

En utilisant la formule des sinus dans le triangle ABC : $\frac{AB}{\sin(\widehat{BCA})} = \frac{BC}{\sin(\hat{A})}$.

Or dans un triangle, la somme des angles est égale à $180°$ donc

$$\hat{A} = 180 - \hat{B} - \widehat{BCA} = 180 - 32 - (180 - 57) = 25°$$

D'où $AB = \frac{BC \sin(\widehat{BCA})}{\sin(\hat{A})} = \frac{8 \sin(180-57)}{\sin(25)}$ et donc $\boxed{AB \approx 15{,}876\ km}$

Exercice 6

1) Pour tout a et $b \in \mathbb{R}$,

$\frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)] = \frac{1}{2}[\cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) - (\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b))]$
$= \frac{1}{2}[2\sin(a)\sin(b)] = \sin(a)\sin(b)$

2) $\cos(2a) + \sin(2a) = 1 - 2\sin^2(a) + 2\cos(a)\sin(a)$
$= \cos^2(a) + \sin^2(a) + 2\cos(a)\sin(a) - 2\sin^2(a)$
$= (\cos(a) + \sin(a))^2 - 2\sin^2(a)$

3) $\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{9\pi}{12} + \frac{4\pi}{12} = \frac{13\pi}{12}$

$\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$
$= -\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

D'où $\boxed{\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}}$

$\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ d'où $\boxed{\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{4}}$