625

Correction devoir surveillé n°9

Exercice 1

On considère la suite arithmétique (u_n) de raison 7 telle que $u_0 = 7$.
Autrement dit, la suite (u_n) correspond aux multiples de 7. Pour répondre à la question, on cherche $u_0 + u_1 + .. + u_n$ avec $u_n < 1000$ et $u_{n+1} > 1000$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + n \times r = 7 + 7n$ en utilisant la formule des suites arithmétiques.
Pour déterminer n tel que $u_n < 1000$ et $u_{n+1} > 1000$, on doit résoudre : $7 + 7n < 1000$ dans $\mathbb{N}$.
$7 + 7n < 1000 \Leftrightarrow 7n < 993 \Leftrightarrow n < \frac{993}{7}$ or $\frac{993}{7} \approx 141,9$.
Donc $u_{141} < 1000$ et $u_{142} > 1000$. On vérifie bien : $u_{141} = 7 + 7 \times 141 = 994$ et $u_{142} = 1001$.
La somme cherchée est donc $u_0 + u_1 + .. + u_{141}$.
On utilise la somme des termes d'une suite arithmétique : $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{u_0 + u_n}{2} \times (n+1)$
Ici, cela donne : $u_0 + u_1 + .. + u_{141} = \frac{u_0 + u_{141}}{2} \times 142 = \frac{7+994}{2} \times 142 = 71071$.
$\boxed{\text{La somme des multiples de 7 inférieurs à 1000 est égale à 71 071.}}$

Exercice 2

1) Pour $n \in \mathbb{N}$: $n^2 \leq n^2 + 4$ car $4 > 0$.

Pour la seconde partie de l'inégalité, on considère la différence :
$n^2 + 4 - (n+2)^2 = n^2 + 4 - n^2 - 4n - 4 = -4n$ qui est négatif car $n \in \mathbb{N}$.
Donc pour $n \in \mathbb{N}$, $n^2 + 4 \leq (n+2)^2$.
Finalement $\boxed{n^2 \leq n^2 + 4 \leq (n+2)^2}$.

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$: $0 < n^2 \leq n^2 + 4 \leq (n+2)^2$

La fonction racine carré est croissante sur $[0; +\infty[$ donc $\sqrt{n^2} \leq \sqrt{n^2+4} \leq \sqrt{(n+2)^2}$
D'où $n \leq \sqrt{n^2+4} \leq n+2$.
En divisant les termes de cette inégalité par $n > 0$, on obtient : $1 \leq u_n \leq 1 + \frac{2}{n}$
Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{2}{n} = 1$.
Par ailleurs, $\lim_{n\to+\infty} 1 = 1$. Donc d'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge vers 1.}}$

Exercice 3

1) $\boxed{\text{FAUX}}$: en effet, il n'y pas de minorant pour la suite (u_n), il n'y a donc aucune raison pour qu'elle reste positive. On peut, comme contre-exemple, choisir $u_n = -n$.

Nous avons bien : $-n \leq \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour autant $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

2) $\boxed{\text{FAUX}}$: on peut avoir une suite positive qui converge vers 0 en oscillant. Par exemple : $u_n = \frac{2}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Par encadrement, cette suite converge bien vers 0 : pour $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ et donc $\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} \leq u_n \leq \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}$
Ceci nous permet aussi de montre que $u_n \geq 0$ car $\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} = \frac{2n-1}{n^2} \geq 0$
Par ailleurs $u_1 = 1$; $u_2 = \frac{5}{4}$; $u_3 = \frac{5}{9}$ donc (u_n) n'est pas décroissante.

3) $u_1 = 1 - \frac{5}{3} = -\frac{2}{3}$; $u_2 = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$; $u_3 = 1 - 2 = -1$; $u_4 = 1 - 1 = 0$ et u_5 n'est pas définie donc l'affirmation est $\boxed{\text{FAUSSE}}$.

4) Par rapport à la propriété du cours, il manque l'argument : $u_n \geq 0$!! Sinon, on ne peut pas passer de l'inégalité $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ à $u_{n+1} \geq u_n$… donc c'est $\boxed{\text{FAUX}}$.

Exercice 4

1) OA_0A_1 est un triangle rectangle isocèle en A_1 et $OA_0 = 8$ donc, en utilisant le théorème de Pythagore, on obtient : $8^2 = A_0A_1^2 + OA_1^2 \Leftrightarrow A_0A_1^2 = 32 \Leftrightarrow A_0A_1 = 4\sqrt{2}$ car A_0A_1 est une longueur ! Donc $\boxed{l_0 = 4\sqrt{2}}$.

De même, dans le triangle OA_1A_2 rectangle isocèle en A_2 : $OA_1^2 = OA_2^2 + A_1A_2^2$ or $OA_1 = A_0A_1 = 4\sqrt{2}$ donc $2A_1A_2^2 = 32$ et on en déduit : $A_1A_2 = 4$ d'où $\boxed{l_1 = 4}$.

De même dans le triangle OA_2A_3 rectangle isocèle en A_3 : $OA_2^2 = OA_3^2 + A_2A_3^2$ et donc $A_2A_3^2 = 8$ et $\boxed{l_2 = 2\sqrt{2}}$.

2) Le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle isocèle en A_{n+1} donc, d'après le théorème de Pythagore : $OA_n^2 = OA_{n+1}^2 + A_nA_{n+1}^2$ or $OA_n = A_nA_{n-1} = l_n$ et $OA_{n+1} = A_nA_{n+1} = l_{n+1}$ donc $l_n^2 = 2l_{n+1}^2$.

On en déduit alors, comme $l_n > 0$ et $l_{n+1} > 0$:$l_{n+1} = \frac{l_n}{\sqrt{2}}$ et donc $\boxed{l_{n+1} = \frac{l_n\sqrt{2}}{2}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) Cette égalité montre que (l_n) est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$. On peut donc utiliser les formules des suites géométriques donc $l_n = l_0 \times q^n = 4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ d'où $\boxed{l_n = 4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

4) La longueur de la spirale obtenue jusqu'au point A_n est : $A_0A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}A_n = l_0 + l_1 + .. + l_{n-1}$

Ceci représente donc la somme des termes d'une suite géométrique d'où :

$$A_0A_1 + A_1A_2 + .. + A_{n-1}A_n = \frac{l_n - l_0}{q-1} = \frac{4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n - 4\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} - 1}$$

Répéter indéfiniment cette construction revient à calculer la limite de ce résultat quand n tend vers $+\infty$. La longueur l_n convergera vers 0 car c'est le terme d'une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2} \in]-1;1[$.

La somme converge donc vers $-\frac{l_0}{q-1} = -\frac{4\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}-1} = -4\sqrt{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}-2} = -\frac{8\sqrt{2}(\sqrt{2}+2)}{(\sqrt{2}-2)(\sqrt{2}+2)} = -\frac{16+16\sqrt{2}}{2-4} = \boxed{8 + 8\sqrt{2}}$

Exercice 5

1) $u_1 = \frac{4(-1)}{4-(-1)} = \boxed{-\frac{4}{5}}$; $u_2 = \frac{4\left(-\frac{4}{5}\right)}{4-\left(-\frac{4}{5}\right)} = -\frac{16}{24} = \boxed{-\frac{2}{3}}$.

2) $u_1 - u_0 = -\frac{4}{5} + 1 = \frac{1}{5}$ et $u_2 - u_1 = -\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{2}{15}$ donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ n'est pas arithmétique}}$.

$\frac{u_1}{u_0} = -\frac{\frac{4}{5}}{-1} = \frac{4}{5}$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{4}{5}} = \frac{5}{2}$ donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ n'est pas géométrique}}$.

3)

a. $v_0 = \frac{3(-1)+2}{-1} = \boxed{1}$; $v_1 = \frac{3\left(-\frac{4}{5}\right)+2}{-\frac{4}{5}} = -\frac{2}{5} \times \left(-\frac{5}{4}\right) = \boxed{\frac{1}{2}}$; $v_2 = \frac{3\left(-\frac{2}{3}\right)+2}{-\frac{2}{3}} = 0 \times \left(-\frac{3}{2}\right) = \boxed{0}$

b. Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{3u_{n+1}+2}{u_{n+1}} - \frac{3u_n+2}{u_n} = \frac{\frac{3(4u_n)}{4-u_n}+2}{\frac{4u_n}{4-u_n}} - \frac{3u_n+2}{u_n} = \frac{(12u_n + 8 - 2u_n)}{4-u_n} \times \frac{4-u_n}{4u_n} - \frac{3u_n+2}{u_n}$$

$$= \frac{10u_n + 8 - 4(3u_n+2)}{4u_n} = -\frac{2u_n}{4u_n} = -\frac{1}{2}$$

Le résultat ne dépend pas de n donc $\boxed{(v_n) \text{ est arithmétique de raison } -\frac{1}{2}}$.

c. Pour $n \in \mathbb{N}$: $v_n = v_0 + n \times r$ d'où $\boxed{v_n = 1 - \frac{1}{2}n}$

d. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = \frac{3u_n+2}{u_n}$ donc $u_nv_n = 3u_n + 2$ ou encore $u_n = \frac{2}{v_n-3}$.

En utilisant la question précédente, on trouve donc : $u_n = \frac{2}{1-\frac{1}{2}n-3} = \frac{2}{-\frac{1}{2}n-2}$ et en simplifiant : $\boxed{u_n = -\frac{4}{n+4}}$