Devoir Commun de Mathématiques - Classes de premières S
Lycée Saint-Exupéry - durée : 3h

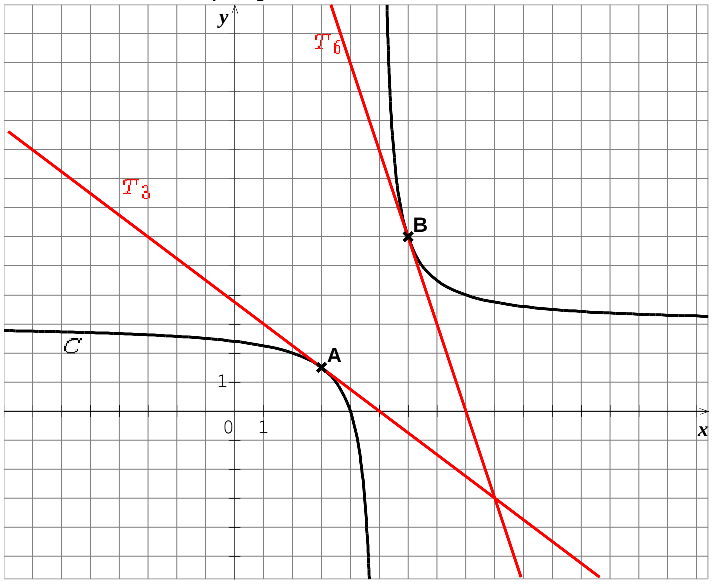
Nom : Prénom : Classe :

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la présentation.
Les calculatrices graphiques et programmables sont autorisées.

Exercice 1 : QCM – 10 points

Les questions suivantes sont à choix multiples. Parmi les réponses proposées, une seule est correcte. Entourez sur votre sujet le numéro de la réponse qui vous semble correcte.
Attention, si une bonne réponse vous fait gagner 1 point, une mauvaise vous en fait perdre 0,25.

Partie A – Lectures graphiques.



On donne ci-contre la courbe C d'une fonction f.
La droite T_3 est la tangente à C au point A d'abscisse3.
La droite T_6 est la tangente à C au point B d'abscisse 6.

a) Le nombre dérivé de f en 3 vaut :
1) $\frac{3}{4}$
2) $\frac{4}{3}$
3) $-\frac{3}{4}$
4) $-\frac{4}{3}$
5) 5

b) La courbe de la fonction f admet :
1) la droite d'équation $x = 3$ comme asymptote verticale et la droite d'équation $y = 5$ comme asymptote horizontale.
2) la droite d'équation $x = 5$ comme asymptote horizontale et la droite d'équation $y = 3$ comme asymptote verticale.
3) la droite d'équation $y = 3$ comme asymptote oblique et la droite d'équation $x = 5$ comme asymptote verticale.
4) la droite d'équation $y = 3$ comme asymptote horizontale et la droite d'équation $x = 5$ comme asymptote verticale
5) la droite d'équation $y = 3$ comme asymptote horizontale et la droite d'équation $x = 5$ comme asymptote oblique.

c) L'approximation affine de $f(6 + h)$ pour h proche de 0 est :
1) $-3h$
2) h
3) 6
4) $-3h + 6$
5) $6h - 3$

Partie B – Recherche de limites et d'asymptotes

a) $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \frac{2}{x^2 - x - 2} =$
1) $+\infty$
2) 0
3) $-\infty$
4) $-\frac{2}{3}$
5) Cette limite n'existe pas

b) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2} =$
1) $+\infty$
2) 0
3) 4
4) 2
5) Cette limite n'existe pas

c) La courbe de la fonction $x \mapsto 2x - 5 + \frac{x-1}{3-x}$ admet comme asymptote oblique en $+\infty$, la droite d'équation :

1) $y = x - 1$
2) $y = 3 - x$
3) $y = 2x - 6$
4) $y = 3$
5) $y = 2x - 5$

Partie C – Opération sur les fonctions.

On considère la fonction f définie sur $[-2; 3]$ et la fonction g définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ dont on donne ci-dessous les tableaux de variations :

x	-2		-1		0		2		3
Signe de $f'(x)$			$+$		0		$-$		
$f(x)$	-1	↗	$-0,5$	↗	4	↘	1	↘	0

x	$-\infty$		-5		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
Signe de $g'(x)$			$+$		0	$-$	‖		$-$		0		$+$		
$g(x)$	-2	↗	0	↗	7	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↘	-3	↗	3	↗	$+\infty$

On sait de plus que $g'(2) = 0,5$ et $f'(2) = -3$. Enfin on définit $u = g \circ f$

a) L'ensemble de définition D_u de la fonction u est :

1) $\mathbb{R} - \{-1\}$
2) $]-2; 3]$
3) $[-2; 3]$
4) $[-2\,; 3[$
5) $]-2; 3[$

b) Sur l'intervalle $]2; 3[$, la fonction u est :

1) Croissante
2) Décroissante
3) Croissante puis décroissante
4) Décroissante puis croissante
5) Il n'y a pas suffisamment d'informations pour répondre

c) On peut affirmer que :

1) $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} (f \times g)(x) = +\infty$
2) $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} (f \times g)(x) = +\infty$
3) $\lim\limits_{x \to 2} (f \times g)(x) = 6$
4) $\lim\limits_{x \to -2} (f \times g)(x) = 6$
5) $\lim\limits_{x \to -\infty} (f \times g)(x) = 2$

d) Le nombre dérivé de $f \times g$ en 2 vaut :

1) 9,5
2) $-9,5$
3) $-1,5$
4) 4,5
5) $-8,5$

Exercice 2 : Fonctions – 10 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{2\}$ par :

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x-2}$$

On note C_f sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$

Partie A : Etude de f sur $\mathbb{R}-\{2\}$

1. **a)** Déterminer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$

   b) Déterminer a, b et c réels tels que $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-2}$.

   c) En déduire que C_f admet une asymptote oblique Δ dont on précisera l'équation.

   d) Etudier la position relative de Δ et de C_f sur $\mathbb{R}-\{2\}$.
2. Déterminer la limite de f à gauche en 2. Interpréter graphiquement.
3. Démontrer que C_f admet le point $A(2;4)$ comme centre de symétrie.
4. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}-\{2\}$.

Partie B : Construction de C_f

Tracer la courbe de la fonction f dans le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ fourni en Annexe.
Faire apparaître tous les tracés utiles (tangentes, asymptotes, …)

Partie C : Résolution de $f(x)=m$

1. **Aspect graphique.**
   Déterminer graphiquement, en fonction de m, le nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$, où m est un réel.

2. **Aspect algébrique.**
   On va maintenant déterminer par le calcul le nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$ où m est un réel.
   a) Démontrer que dans $\mathbb{R}-\{2\}$, $f(x)=m \Leftrightarrow x^2-mx+2m+1=0$
   b) En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$ en fonction de m.

Exercice 3 : Barycentre – 10 points

ABC est un triangle. On appelle I le milieu de $[AB]$ et K le point tel que $\overrightarrow{CK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$.
La figure, fournie en Annexe, est à compléter au fur et à mesure.

Partie A

1) Exprimer K comme barycentre des points A et C affectés de coefficients à préciser.
2) Déterminer puis tracer l'ensemble des points M du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MC}\right\|=9$

Partie B

m étant un réel, on appelle G_m le barycentre, lorsqu'il existe, des points pondérés $(A;m)$, $\left(B;\frac{1}{m}\right)$ et $(C;2m)$.
Le but de cette partie est d'étudier les positions limites du point G_m lorsque m tend vers $+\infty$ ou vers 0.

1) Déterminer l'ensemble D des réels m pour lesquels le barycentre G_m existe.
2) Placer, en justifiant, le point G_1.
3) Montrer que G_m se trouve sur la droite (KB).
4)
   a. Montrer que $\overrightarrow{KG_m}=\frac{1}{1+3m^2}\overrightarrow{KB}$
   b. Démontrer que, quel que soit m non nul, $0<\frac{1}{1+3m^2}<1$.
   c. En déduire que G_m se trouve sur le segment $[KB]$.
5) En utilisant le résultat de la question 4)a, déterminer $\lim\limits_{m\to+\infty}\left\|\overrightarrow{KG_m}\right\|$
6) Déterminer $\lim\limits_{m\to 0}\left\|\overrightarrow{KG_m}\right\|$
7) En déduire la position limite de G_m lorsque m tend vers $+\infty$ et quand m tend vers 0.

Exercice 4 : Trigonométrie – 10 points

Dans le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ orthonormal fourni en Annexe, on a placé les points $A(1;0)$, $C(0;1)$, $B(1;1)$ et E tel que le triangle AEB soit équilatéral.

Les parties A, B, C et D sont indépendantes les unes des autres.

Partie A

On considère le point G de coordonnées polaires $\left[2;\frac{\pi}{6}\right]$.

1) Placer G
2) Déterminer les coordonnées cartésiennes de G.

Partie B

1) Placer le point F tel que le triangle BCF soit équilatéral et $\left(\overrightarrow{FC};\overrightarrow{FB}\right)=\frac{\pi}{3}\quad[2\pi]$.
2)
   a. Montrer que le triangle AEO est isocèle
   b. En déduire que $\left(\overrightarrow{EO};\overrightarrow{EA}\right)=\frac{5\pi}{12}\quad[2\pi]$.
3)
   a. Déterminer une mesure de $\left(\overrightarrow{BE};\overrightarrow{BF}\right)$.
   b. En déduire que $\left(\overrightarrow{EB};\overrightarrow{EF}\right)=\frac{\pi}{4}\quad[2\pi]$.
4)
   a. Utiliser la relation de Chasles pour déterminer une mesure de $\left(\overrightarrow{EO};\overrightarrow{EF}\right)$.
   b. Que peut-on en déduire pour les points E, O et F ?

Partie C

Soit I le pied de la hauteur issue de E dans le triangle EAB et D le point d'intersection de la droite (EI) et de l'axe des ordonnées. On admettra que $OAID$ est un rectangle.

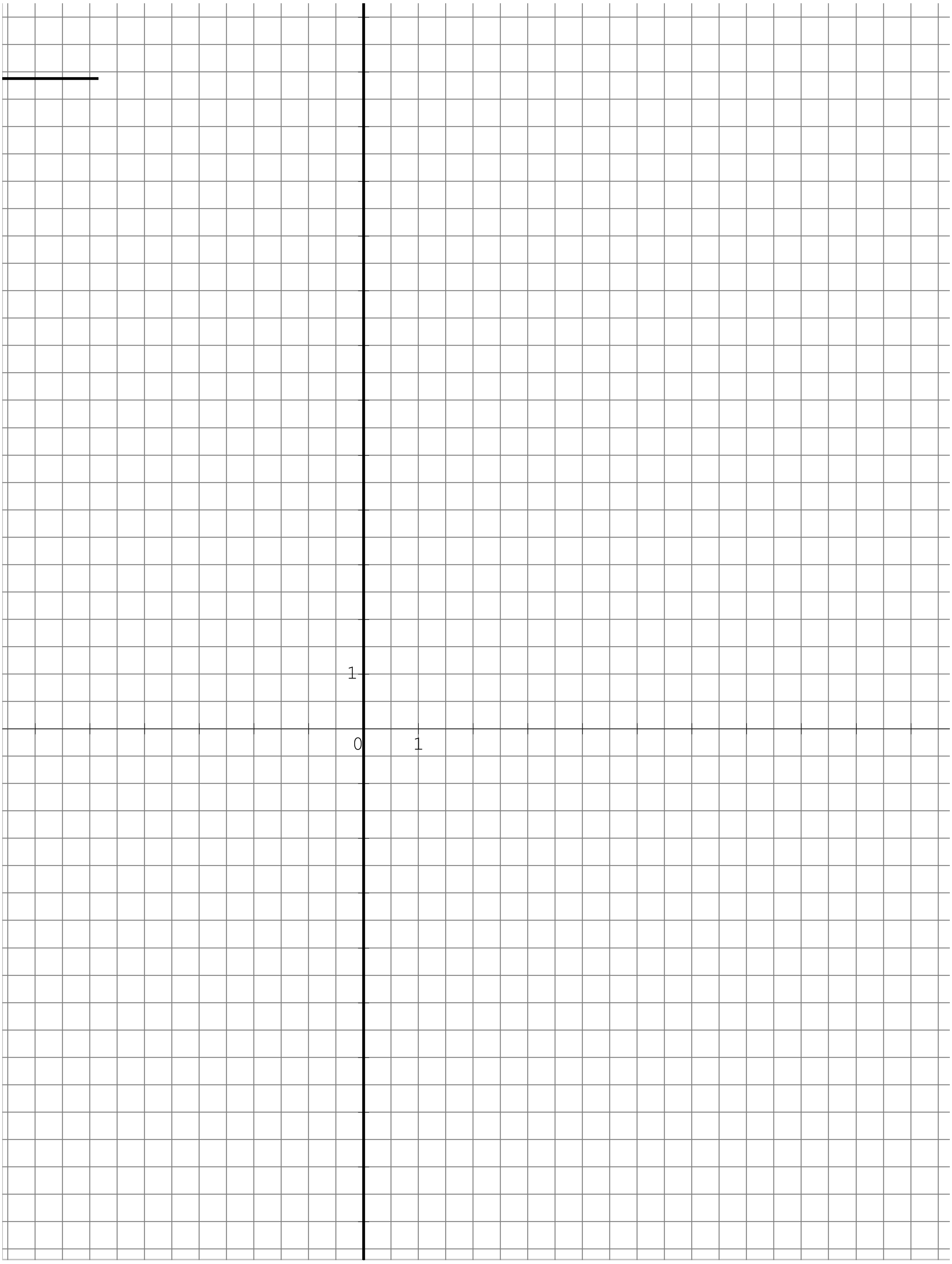
1) Donner OD , EI puis DE.
2) En déduire les coordonnées cartésiennes de E.
3) Déterminer OE.
4) Donner les coordonnées polaires de E.
5) En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

Partie D

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[-\pi,\pi]$: $\sin(3x)=\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

ANNEXE (à rendre avec la copie)

Courbe de l'exercice 2



Nom : Prénom : Classe :

ANNEXE 2

Figure de l'exercice 3

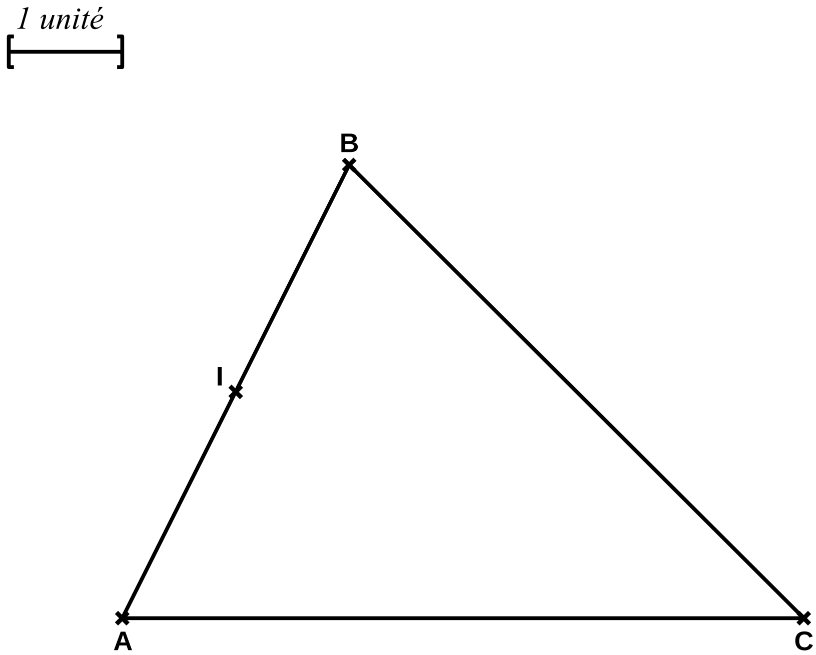


Figure de l'exercice 4